

R. Bc. 58638

W.

SC/C/770

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS



# Problemas de análisis armónico sobre operadores maximales y pesos

Ana María Vargas Rey

Tesis dirigida por Fernando Soria de Diego

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN .....	1
CAPÍTULO 1. El operador maximal para medidas invariantes bajo rotaciones ....	6
§1. Introducción .....	6
§2. Teoremas y ejemplos .....	9
§3. Demostración del teorema 1.1 .....	14
§4. Demostración del teorema 1.6 .....	27
CAPÍTULO 2. Acotaciones de tipo débil (1,1) con peso para operadores con núcleos no suaves .....	36
§1. Operador maximal con un núcleo sin regularidad .....	37
§2. Integral singular con un núcleo sin regularidad .....	49
§3. Bochner–Riesz en el índice crítico. Pesos $A_1$ .....	58
CAPÍTULO 3. Una desigualdad con peso para el operador maximal de Kakeya ..	63
§1. Introducción y enunciado de los teoremas .....	63
§2. Demostraciones de los teoremas .....	68

CAPÍTULO 4. El operador maximal sobre un conjunto de Cantor de direcciones.74

§1. Introducción: operadores maximales sobre direcciones. Teoremas para el conjunto de Cantor.....74

§2. Demostración de los teoremas.....79

BIBLIOGRAFÍA.....85

## INTRODUCCIÓN

Esta tesis no necesita una lectura lineal. Cada uno de sus capítulos trata sobre un problema diferente al de los otros y tiene vida independiente. Sin embargo, hay un elemento común a todos ellos, y es la presencia de algún (no siempre el mismo) operador maximal. En algunos casos es el objeto del que se estudian propiedades de acotación. En otros, forma parte de un par de pesos para un operador distinto. A veces actúa en los dos papeles.

El más importante de los operadores maximales apareció en un artículo de G. H. Hardy y J. E. Littlewood [H-L] en 1930. Lo escribiremos como

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy, \quad \text{para } f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

tomando el supremo sobre todas las bolas que contienen al punto  $x$ . Se pueden dar definiciones diferentes, que dan lugar a operadores equivalentes, considerando sólo bolas centradas en  $x$ , o haciendo los promedios de  $f$  sobre cubos en lugar de bolas.

Hardy y Littlewood, observaron que  $\mathcal{M}$  dominaba a otros muchos operadores, que ahora forman parte de la familia de “buenas” aproximaciones de la identidad, lo cual permitía probar teoremas de convergencia, por ejemplo, para las sumas de Cesàro de la serie de Fourier de una función, o la solución del problema de Dirichlet en el disco unidad. Mucho después, E. M. Stein [S2] mostró que estudiar operadores maximales como medio para obtener teoremas de convergencia puntual, no era una complicación innecesaria, sino que ambos problemas son equivalentes en los casos en que se preserva la estructura del espacio ambiente, cuando nos ocupamos de funciones de  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq 2$ . Y, en general, el estudio de operadores similares al de Hardy y Littlewood, es la herramienta básica para probar teoremas de diferenciación, que a su vez dan información sobre el comportamiento de los operadores maximales.



El capítulo 1 trata de una generalización del operador de Hardy y Littlewood. Se obtiene sustituyendo en la definición la medida de Lebesgue por otra cualquiera:

$$\mathcal{M}_\mu f(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y), \quad \text{para } f \in L^1_{\text{loc}}(d\mu).$$

El problema que nos ocupa es el estudio de sus propiedades de acotación. Tomamos como modelo el operador maximal de Hardy–Littlewood, que está acotado en  $L^p$  si  $1 < p \leq \infty$  y es de tipo débil  $(1,1)$ , es decir, aplica  $L^1$  en el espacio  $L^{1,\infty}$ . Se podría esperar que el comportamiento de  $\mathcal{M}_\mu$  fuese análogo, ser acotado en  $L^p(d\mu)$  y de tipo débil  $(1,1)$  respecto a  $\mu$ . Fácilmente se comprueba que es así en  $\mathbb{R}$ , y, si  $\mu$  es una de las llamadas medidas doblantes, en cualquier dimensión. Pero, como observó P. Sjögren [Sj], el teorema no es cierto en general.

En este capítulo nos restringimos al caso de medidas invariantes bajo rotaciones y analizamos si los correspondientes operadores son de tipo débil  $(1,1)$  respecto a ellas. Probamos dos teoremas. Si se impone la condición de que el soporte de la medida sea todo  $\mathbb{R}^n$  (Teorema 1.1), hay condiciones geométricas a la vez necesarias y suficientes para que  $\mathcal{M}_\mu$  sea acotado donde queremos. De entre ellas queremos destacar dos: en primer lugar, que la medida verifique la condición de ser doblante cuando mide bolas cuyo radio es bastante más pequeño que su distancia al origen; en segundo que verifique la condición análoga cuando mide anillos.

El teorema 1.6 muestra que si exigimos que el soporte de  $\mu$  verifique cierta propiedad, que, por ejemplo, se cumple cuando es una bola o un anillo centrado en el origen (y puesto que hablamos de medidas invariantes por rotaciones, éstos y el anterior son los casos más importantes),  $\mathcal{M}_\mu$  no es de tipo débil  $(1,1)$  respecto a  $\mu$ .

Los dos capítulos siguientes están dedicados a probar desigualdades con peso para varios operadores. Los modelos a los que intentan parecerse son las desigualdades de Fefferman–Stein [F–S] para el operador maximal de Hardy–Littlewood,

$$(1) \quad \begin{aligned} \omega(\{x / \mathcal{M}f(x) > \lambda\}) &\leq \frac{C}{\lambda} \int |f(y)| \mathcal{M}\omega(y) dy, \\ \int |\mathcal{M}f(y)|^p \omega(y) dy &\leq C_p \int |f(y)|^p \mathcal{M}\omega(y) dy \quad 1 < p \leq \infty, \end{aligned}$$

y las correspondientes para las integrales singulares de Calderón–Zygmund:

$$(2) \quad \begin{aligned} \omega(\{x / |Tf(x)| > \lambda\}) &\leq \frac{C_\alpha}{\lambda} \int |f(y)| (\mathcal{M}(\omega^\alpha)(y))^{1/\alpha} dy, \\ \int |Tf(y)|^p \omega(y) dy &\leq C_{p,\alpha} \int |f(y)|^p (\mathcal{M}(\omega^\alpha)(y))^{1/\alpha} dy \quad 1 < p \leq \infty, \end{aligned}$$

para todo  $\alpha > 1$ .

La aplicación clásica de estas estimaciones era la obtención de desigualdades para operadores de tipo vectorial (o, si preferimos decirlo de otro modo, para funciones "cuadrado"). Pero no es la única posibilidad. Como muestra el principio de acotación de J. L. Rubio de Francia [R], la teoría  $L^p$  (respecto a la medida de Lebesgue) es equivalente en muchos casos a una teoría  $L^2$  con pesos. Las desigualdades con pesos pueden ser un buen sustituto cuando no se conoce la acotación en  $L^p$  de un operador. Este es, por ejemplo, el único modo en que hasta ahora se ha podido probar la convergencia puntual de los operadores multiplicadores de Bochner-Riesz de índice menor o igual a  $\frac{n-1}{2(n+1)}$  para funciones de  $L^p$ ,  $2 \leq p < \frac{2n}{n-1-2\lambda}$  (véase [C-R-V]).

Los resultados que presentamos responden la siguiente pregunta: dado un operador  $T$ , lineal o no, que está acotado en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  o es de tipo débil  $(p,p)$ , ¿podemos encontrar un operador  $P$ , que en el mejor de los casos será una modificación de un operador maximal, que haga que la desigualdad

$$(3) \quad \int |Tf(y)|^p \omega(y) dy \leq C \int |f(y)|^p P\omega(y) dy,$$

o, en el segundo caso

$$\omega(\{x / Tf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int |f(y)|^p P\omega(y) dy,$$

sea cierta para toda función medible y positiva  $\omega$ , y para todas las funciones  $f \in L^p(\omega dx)$ , con una constante independiente de  $\omega$  y  $f$ ?

En el capítulo 2 se demuestran desigualdades de tipo débil (1,1) con pesos para tres operadores diferentes. Los dos primeros son un operador maximal y una integral singular con un núcleo homogéneo sin regularidad. Este operador maximal es una generalización, en un sentido distinto al del primer capítulo, del operador maximal de Hardy-Littlewood sobre bolas centradas. Por el método de rotaciones se prueba que, si el núcleo es integrable sobre la esfera unidad, el operador maximal está acotado en  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ . Se ha probado que es de tipo débil (1,1) bajo ciertas hipótesis. Por un lado, M. Christ y J. L. Rubio de Francia [C], [C-R], exigen que el núcleo pertenezca al espacio  $L(\log^+ L(S^{n-1}))$ . Por su parte, S. M. Hudson [Hu] probó el resultado en dimensión 2, suponiendo unas condiciones de monotonía sobre el núcleo. La integral singular, está acotada en  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$  si el núcleo está en  $L^q$  con  $q > 1$ , o, si es impar e integrable. Que es de tipo débil (1,1), con la hipótesis de que el núcleo pertenezca a  $L(\log^+ L(S^{n-1}))$ , está probado hasta dimensión 5 por M. Christ y J. L. Rubio de Francia [C-R] por un lado e, independientemente, por S. Hofmann [H2] en dimensión 2.

Nosotros demostraremos que, si el núcleo pertenece a  $L^q$  con  $q > 1$ , ambos operadores son de tipo débil (1,1) respecto a pares de pesos de la forma  $(\omega, \tilde{M}\omega)$ ,

donde el operador  $\tilde{M}$  es una composición del propio operador maximal que estudiamos y operadores de Hardy–Littlewood, modificados por una potencia. Para el operador maximal probamos el teorema en todas las dimensiones, y para la integral singular sólo en dimensión 2. Queremos hacer notar que en el problema sin pesos, no hay diferencia entre probar el tipo débil (1,1) suponiendo que el núcleo está en  $L^q$  y suponiendo que pertenece a  $L(\log^+ L)$ , debido al teorema de extrapolación de Yano. Para el operador maximal se obtiene además otra desigualdad con peso con hipótesis más débiles.

El tercer operador es el multiplicador de Bochner–Riesz en el índice crítico. Es un ejemplo (y también lo es la integral singular con núcleo sin regularidad) de operador integral fuertemente singular, es decir, su núcleo satisface las condiciones de tamaño de los núcleos estándar, pero no las exigidas sobre el gradiente. A pesar de esto, resulta ser acotado en  $L^p$  y, según demostró M. Christ [C], de tipo débil (1,1), como lo son las integrales singulares con núcleo estándar. Demostraremos que también verifica las mismas desigualdades con peso (2) que éstas, o dicho de otro modo, que aplica  $L^1(\omega)$  en  $L^{1,\infty}(\omega)$  cuando  $\omega$  es un peso de la clase  $A_1$ , y por tanto, por extrapolación está acotado en  $L^p(\omega)$  cuando  $\omega \in A_p$ ,  $1 < p < \infty$ .

El objeto de estudio del capítulo 3 es el operador maximal de Keakeya, que se define del mismo modo que el operador de Hardy–Littlewood, pero tomando promedios sobre paralelepípedos con una excentricidad fija. Notemos que cuando la excentricidad es 1, recuperamos el operador maximal de Hardy–Littlewood de promedios sobre cubos. El interés de este operador se debe sobre todo a su relación con el problema de sumación esférica de la transformada de Fourier. Su comportamiento ha sido bien estudiado en dimensión 2, pero en dimensiones superiores el problema no tiene aún una solución completa. Es obvio que a partir de la acotación del operador de Hardy–Littlewood, se prueba que el de Keakeya está acotado en  $L^p$  si  $1 < p \leq \infty$  y que es de tipo débil (1,1). Pero para que el operador de Keakeya nos provea alguna información sobre el problema de sumación esférica, es esencial saber cómo varía la constante de acotación dependiendo de la excentricidad. El resultado óptimo, en dimensión mayor o igual a 3, sólo se sabe demostrar en algunos espacios  $L^p$  con un exponente máximo poco mayor que  $\frac{n+1}{2}$ . Hasta  $\frac{n+1}{2}$  llegaron M. Christ, J. Duoandikoetxea y J. L. Rubio de Francia [C–D–R], y J. Bourgain [B] obtuvo el que es el mejor resultado hasta la fecha. Nosotros generalizamos el resultado cuando  $p \leq \frac{n+1}{2}$ . Evidentemente aquí el candidato deseado para ser  $P$  en la desigualdad (3) es el mismo operador de Keakeya, por analogía con las desigualdades de Fefferman–Stein (1), y ese es el resultado que hemos obtenido.

Por último, queremos hablar de otra generalización del operador maximal de Hardy–Littlewood, relacionada con el operador de Keakeya. Son los operadores que se definen tomando el supremo de promedios sobre rectángulos (en dimensión 2) a

los que sólo se permite tener unas determinadas direcciones. El problema aquí es probar que se trata de un operador acotado, cuando el conjunto de direcciones es infinito, o estimar el tamaño de su norma en función del número de direcciones, en caso de que sea finito. En el capítulo 4 nos ocupamos de una familia de operadores de este tipo, cuyas direcciones se distribuyen en la circunferencia unidad dentro de un conjunto de Cantor. Probaremos que el mayor de todos ellos, aquél en que admitimos todas las direcciones del conjunto de Cantor, está bien definido para las funciones de un espacio de Hilbert algo más pequeño que  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , pero que incluye a los demás espacios de Sobolev que son de Hilbert, y también para las funciones cuya transformada de Fourier tiene su soporte acotado en una dirección. Además veremos que envía estos espacios a  $L^2$ . Para los otros operadores, cuyo conjunto de direcciones es finito, estimaremos su constante de acotación en  $L^2$ , mejorando, en este caso particular, el resultado probado por S. Wainger [W].

Concluyo la introducción con un párrafo sin matemáticas. Quiero, con estas últimas líneas, dar las gracias a mi profesor, Fernando Soria, por el trabajo y el tiempo que ha empleado en traerme hasta aquí, y por haber dejado que me apoyara en él en todo momento. Y a José Luis Torrea, que me guió al principio.

Cantoblanco, junio de 1993

# CAPÍTULO 1

## EL OPERADOR MAXIMAL PARA MEDIDAS INVARIANTES BAJO ROTACIONES

### §1. INTRODUCCIÓN

Sea  $\mu$  una medida de Borel en  $\mathbb{R}^n$ , positiva y finita sobre compactos. Recordemos que esto implica que  $\mu$  es regular. Definimos el operador maximal asociado a  $\mu$ ,  $\mathcal{M}_\mu$ , del modo siguiente:

$$\mathcal{M}_\mu f(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}_x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu \quad \text{para } f \in L^1_{\text{loc}}(\mu),$$

donde

$$\mathcal{B}_x = \{B \text{ bolas abiertas} : x \in B \text{ y } \mu(B) > 0\}.$$

Es indiferente tomar bolas abiertas o cerradas en la definición de  $\mathcal{M}_\mu$ , a causa del teorema de la convergencia monótona. No es cierto en general que la medida de una bola abierta sea igual a la de su cierre; para evitar complicaciones innecesarias en las pruebas de los teoremas, trabajaremos con la definición dada arriba (con bolas abiertas).

También definimos el operador maximal centrado

$$\mathcal{M}_\mu^c f(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}_x^c} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu,$$

donde

$$\mathcal{B}_x^c = \{B = B_r(x) : \mu(B) > 0\}.$$

Cuando la medida  $\mu$  es la de Lebesgue, estos dos operadores son versiones del operador maximal de Hardy–Littlewood. Conocemos muy bien sus propiedades: está acotado en  $L^p$  si  $1 < p \leq \infty$ , y es de tipo débil (1,1). Es razonable preguntarse si  $\mathcal{M}_\mu$  y  $\mathcal{M}_\mu^c$  verifican acotaciones similares en los espacios de funciones relacionados con la medida  $\mu$ , o sea, si están acotados en  $L^p(\mu)$ , y si son de tipo débil (1,1) respecto a  $\mu$ .

Gracias al lema de Besicovitch podemos probar que el operador centrado aplica  $L^1(\mu)$  en  $L^{1,\infty}(\mu)$ . La acotación en  $L^\infty$  es clara, y por interpolación también está acotado en  $L^p(\mu)$  si  $1 < p \leq \infty$ .

El operador no centrado,  $\mathcal{M}_\mu$ , tiene un comportamiento más complicado. En dimensión 1,  $\mathcal{M}_\mu$  es de tipo débil (1,1) respecto a  $\mu$ , sea cual sea la medida  $\mu$ , con constante 2 (véanse [M–S] y [Sj]). Esto es consecuencia de un sencillo lema de cubrimiento: *dada una familia finita de intervalos,  $\mathcal{I}$ , existe una subfamilia  $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$ , tal que,  $\bigcup_{I \in \mathcal{I}'} I = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$ , y además  $\sum_{I \in \mathcal{I}'} \chi_I \leq 2$ .*

Sin embargo, en dimensiones superiores hay ejemplos de medidas cuyo operador asociado no es de tipo débil (1,1) respecto a la propia medida. P. Sjögren [Sj] probó que  $d\mu(x) = e^{-|x|^2/2} dx$  es una de ellas. Existe también una familia de medidas para las que la acotación de  $\mathcal{M}_\mu$  es obvia. Son las medidas ‘doblanges’, que deben este nombre a la propiedad que las caracteriza, que consiste en que, para toda bola abierta  $B \subset \mathbb{R}^n$ , se verifica  $\mu(2B) \leq C\mu(B)$ , con una constante  $C$  que no depende de  $B$ . La notación empleada aquí es la habitual, esto es,  $2B$  denota la bola con el mismo centro que  $B$  y radio doble al de ésta.

A la vista de la situación nos planteamos la pregunta de si la condición de ser doblante sería necesaria en dimensiones superiores a 1, o si, por el contrario, existirían medidas  $\mu$  no doblantes cuyo operador  $\mathcal{M}_\mu$  fuera de tipo débil (1,1) (respecto a  $\mu$ , por supuesto, pero dado que no hay ambigüedad, en todo lo que sigue, diremos a veces que uno de estos operadores es acotado o de tipo débil (1,1) cuando queramos decir que es de tipo débil (1,1) respecto a la medida a la que está asociado.) Debemos hacer notar que había una respuesta fácil a esta pregunta; llamemos  $\sigma$  a la medida singular invariante bajo rotaciones con soporte en la esfera unidad,  $S^{n-1}$ ,  $n \geq 2$ , con la normalización  $\sigma(S^{n-1}) = 1$ .  $\mathcal{M}_\sigma$  es semejante al operador maximal de Hardy–Littlewood en dimensión  $n - 1$ , y, en consecuencia,  $\mathcal{M}_\sigma$  es de tipo débil (1,1) respecto a  $\sigma$ , que no es una medida doblante en  $\mathbb{R}^n$ . Este ejemplo parece ser un caso aislado, y buscábamos algo menos obvio.

Intentar hacer los cálculos con una medida arbitraria es demasiado complicado; en la mayor parte de los casos somos incapaces de extraer información alguna sobre la medida de una bola a partir de la ‘fórmula’ que define a  $\mu$ . Por esta razón

hemos centrado nuestra atención en una clase particular, las *medidas invariantes bajo rotaciones*. El ejemplo de P. Sjögren muestra que no tienen un comportamiento trivial. De hecho, dentro de esta clase encontraremos la respuesta a nuestra pregunta. Además, para una parte importante de estas medidas es posible dar caracterizaciones, fáciles de comprobar en los ejemplos prácticos, de las medidas con un operador asociado de tipo débil (1,1). De esto se ocupa este capítulo.

## §2. TEOREMAS Y EJEMPLOS

En todo lo que sigue el espacio ambiente es  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Antes de enunciar los teoremas necesitamos introducir una figura geométrica que aparece de modo natural cuando tenemos una medida invariante bajo rotaciones y bolas.

Dada una bola  $B = B_r(x^0)$ , definimos su sector asociado  $S = S_B$  como

$$(1) \quad S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x^0| - r < |x| < |x^0| + r, \text{ áng}(x, x^0) < \arcsen \frac{r}{|x^0|} \right\} \\ \text{cuando } |x^0| \geq r,$$

$$(2) \quad S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < |x^0| + r\} \quad \text{cuando } |x^0| < r.$$

$\text{áng}(x, x^0)$  denota el ángulo determinado por los vectores  $\vec{0x}$ ,  $\vec{0x^0}$ . (Figura 1)

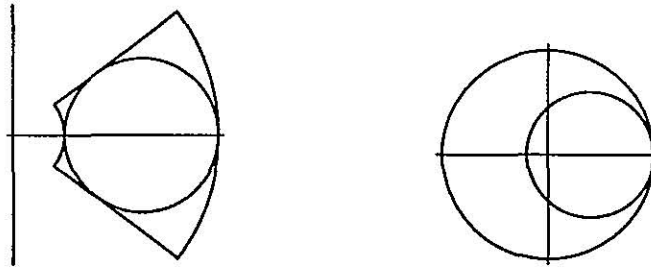


Figura 1: Bolas y sectores en  $\mathbb{R}^2$ . A la izquierda  $|x^0| \geq r$ ; a la derecha  $|x^0| < r$ .

Llamaremos argumento del sector a

$$\arg(S) = \begin{cases} \arcsen \frac{r}{|x^0|}, & \text{si } |x^0| \leq r \\ 2\pi, & \text{si } |x^0| > r. \end{cases}$$

El sector asociado a  $B$  es el menor de todos los sectores (i.e. regiones de la forma  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a < |x| < b \text{ y } \text{áng}(x, x^0) < \beta\}$ ) que contienen a  $B$ . Además, si  $\mu$  es invariante por rotaciones, la  $\mu$ -medida del sector  $S_B$  es equivalente a la de la unión de todas las bolas que resultan al rotar  $B$  alrededor del origen y que tocan a  $B$ .

Diremos que una medida es estrictamente positiva si  $\mu(B) > 0$  para toda bola abierta  $B$ , o, lo que es lo mismo, si su soporte es  $\mathbb{R}^n$ . El primero de los teoremas se refiere a estas medidas.



### Teorema 1.1

Sea  $\mu$  una medida de Borel en  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , positiva, finita sobre compactos e invariante bajo rotaciones. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a)  $\mu$  está en una de estas dos situaciones:

(a.1)  $\mu$  es estrictamente positiva y  $\mathcal{M}_\mu$  es de tipo débil (1,1) respecto a  $\mu$ .

(a.2)  $\mu = \hat{C}_0 \delta_0$ , donde  $\delta_0$  es la delta de Dirac en el origen. En este caso la acotación de  $\mathcal{M}_\mu$  es trivial.

(b) Existe una constante  $C_1 > 0$  tal que

$$\mu\left(\left\{x : \sup_{B \in \mathcal{B}_x} \frac{\chi_B(x^0)}{\mu(B)} > \lambda\right\}\right) \leq \frac{C_1}{\lambda} \quad \text{para todo } \lambda > 0, x^0 \in \mathbb{R}^n.$$

(c)  $\mu(S_B) \leq C_2 \mu(B)$  para toda bola abierta  $B \subset \mathbb{R}^n$ , con  $C_2$  independiente de  $B$ .

(d) Existe una constante  $C_3$  tal que, si  $r \leq 10a$ ,

$$\mu(\{a < |x| < a + 2r\}) \leq C_3 \mu\left(\left\{a + \frac{r}{2} < |x| < a + \frac{3r}{2}\right\}\right).$$

(e)  $\mu$  es 'doblante lejos del origen', es decir,

$$\mu(B_{2s}(x^0)) \leq C_4 \mu(B_s(x^0)) \quad \text{si } s \leq \frac{|x^0|}{4}.$$

(f) Para cada bola  $B$  definimos

$$\mathfrak{B}_B = \{B' \text{ bolas abiertas} / \mu(B') \leq \mu(B) \text{ and } B \cap B' \neq \emptyset\}.$$

Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{\mathfrak{B}_B} B'\right) \leq C_5 \mu(B).$$

### Corolario 1.2

Sea  $d\mu(x) = g(|x|)dx$ , con  $g(t)t^{n-1} \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$  y  $g > 0$  en casi todo punto. Entonces,  $\mathcal{M}_\mu$  es de tipo débil (1,1) si y sólo si existe cierta  $C'_3 > 0$ , tal que

$$(d') \quad \int_a^{a+2r} g(s) ds \leq C'_3 \int_{a+r/2}^{a+3r/2} g(s) ds \quad \text{para todo } r \leq 10a.$$

Si además,  $g$  es monótona en  $(0, \infty)$ , esta condición equivale a

$$(d'') \quad \sup_{2^{k-1} \leq r \leq 2^{k+1}} g(r) \leq C_3'' \inf_{2^{k-1} \leq r \leq 2^{k+1}} g(r),$$

con  $C_3''$  independiente de  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Ejemplos 1.3

(1)  $d\mu(x) = \frac{1}{1+|x|^\alpha} dx$  cumple las hipótesis del corolario y además verifica  $(d'')$ , de modo que  $\mathcal{M}_\mu$  es de tipo débil  $(1,1)$ . Pero, si  $\alpha \geq n$ ,  $\mu$  no es una medida doblante, tal y como comprobamos a continuación:

a) Si  $\alpha = n$ :

$$\mu(B_{2R}(R,0)) \geq \mu(B_R(0,0)) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty$$

y, sin embargo,

$$\mu(B_{R/2}(R,0)) = \int_{B_{R/2}(R,0)} \frac{1}{1+|x|^n} dx \sim \frac{1}{1+R^n} |B_{R/2}(R,0)| \sim 1 \quad \text{si } R \geq 1.$$

b) Si  $\alpha > n$ :

$$\mu(B_{2R}(R,0)) \geq \mu(B_R(0,0)) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|x|^\alpha} dx.$$

Por otro lado,

$$\mu(B_{R/2}(R,0)) \sim \frac{1}{1+R^\alpha} |B_{R/2}(R,0)| \sim \frac{R^n}{1+R^\alpha} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Así pues, hay medidas no doblantes y no triviales que tienen un operador maximal asociado de tipo débil  $(1,1)$ .

(2) Si  $\mu$  es estrictamente positiva y  $\mathcal{M}_\mu$  es de tipo débil  $(1,1)$ , la condición (d) y la regularidad de  $\mu$  obligan a que

$$\mu(\{|x| = a\}) = 0 \quad \text{para todo } a > 0.$$

En particular, si denotamos por  $d\sigma$  la medida singular usual con soporte en la esfera unidad, la medida  $d\mu = d\sigma + dx$  produce un operador no acotado. Curiosamente, tanto  $d\sigma$  como  $dx$  generan por separado operadores acotados.

Notemos que  $d\sigma$  no es un múltiplo de la delta de Dirac en 0, ni estrictamente positiva y no se le puede aplicar el teorema.

- (3)  $d\mu(x) = e^{-|x|^2/2} dx$ ,  $d\mu(x) = e^{-|x|} dx, \dots$ , verifican las hipótesis del corolario 1.2, y no cumplen ( $d''$ ). Por tanto sus operadores no son de tipo débil (1,1).

#### Comentario 1.4

La condición (e), y el ejemplo (1) nos dicen que para medidas  $\mu$  de Borel en  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , finitas sobre compactos y estrictamente positivas, la condición de ser doblante no es necesaria, pero es 'casi necesaria' para que  $M_\mu$  sea acotado. Esta es una diferencia muy notable con el caso unidimensional, donde, como mencionamos en la introducción, cualquier medida positiva da lugar a un operador acotado.

Con lo dicho hasta ahora, hemos resuelto el problema de la acotación de  $M_\mu$  para muchas medidas invariantes bajo rotaciones. Decidir si hemos tratado los ejemplos más importantes depende de la educación matemática que cada uno haya recibido. Nosotros echamos en falta una medida. ¿Cual es el comportamiento de  $d\mu(x) = \chi_{B_1(0)} dx$ ?

Como veremos, este problema tiene que ver con el de la acotación del operador maximal fuerte, que, es bien sabido, no es de tipo débil (1,1). Esto queda más claro si pensamos en un operador maximal sobre sectores en lugar de bolas. Teniendo en cuenta la relación entre ambas figuras geométricas, parece natural que un operador ayude a entender el otro. De hecho, explotando esta idea podemos demostrar un teorema general que incluye a la función característica de la bola unidad.

#### Teorema 1.5

Sea  $\mathcal{D}$  una bola, un anillo o el complementario de una bola en  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , centrado en el origen. Sea  $\mu$  una medida de Borel positiva, finita sobre compactos e invariante bajo rotaciones cuyo soporte sea  $\mathcal{D}$ , es decir, que cumpla que  $\mu(B) > 0$  si  $B \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$  y  $\mu(\mathcal{D} \setminus B) = 0$ . Entonces,

$M_\mu$  no es de tipo débil (1,1) respecto a  $\mu$ .

Como señalábamos en la introducción, la medida singular usual sobre  $S^{n-1}$ ,  $d\sigma$ , tiene un operador asociado de tipo débil (1,1). La medida  $d\sigma$  es el límite de medidas  $c_{n,k} 2^{k(n-1)} \chi_{\{1 \leq |x| \leq 1+2^k\}} dx$ , que, sin embargo, generan operadores que no son acotados.

El teorema 1.5 es un caso particular de un resultado negativo para un conjunto más amplio de medidas.

**Teorema 1.6**

Sea  $\mathcal{D}$  una unión de anillos cerrados centrados en  $0$  (y también puede haber en esta unión una bola cerrada centrada en  $0$ ), que cumple: la intersección de la frontera de  $\mathcal{D}$  con uno de los ejes coordenados tiene un punto, distinto del origen, que no es de acumulación. Sea  $\mu$  una medida de Borel positiva, finita sobre compactos e invariante bajo rotaciones cuyo soporte es  $\mathcal{D}$ . Entonces,

$\mathcal{M}_\mu$  no es de tipo débil  $(1,1)$  respecto a  $\mu$ .

### §3. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.1

Probaremos las siguientes implicaciones

(a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (c),

(c)  $\Rightarrow$  (d)  $\Rightarrow$  (e)  $\Rightarrow$  (c), es decir, la equivalencia de (c), (d) y (e),

(c) + (d) + (e)  $\Rightarrow$  (a),

(c) + (d)  $\Rightarrow$  (f),

(f)  $\Rightarrow$  (c).

(a)  $\Rightarrow$  (b)

(a.1)  $\Rightarrow$  (b) Si  $\mu = \hat{C}_0 \delta_0$ , entonces  $\sup \left\{ \frac{\chi_B(x^0)}{\mu(B)} : B \in \mathcal{B}_x \right\} = \frac{1}{\hat{C}_0}$ , para todo  $x$ . Por esta razón,

$$\left\{ x : \sup_{B_x} \frac{\chi_B(x^0)}{\mu(B)} > \lambda \right\} \neq \emptyset \quad \text{si y sólo si} \quad \lambda < \frac{1}{\hat{C}_0},$$

y en caso de que se verifique esta desigualdad,

$$\mu \left( \left\{ x : \sup_{B_x} \frac{\chi_B(x^0)}{\mu(B)} > \lambda \right\} \right) = \mu(\mathbb{R}^n) = \hat{C}_0 < \frac{1}{\lambda}.$$

(a.2)  $\Rightarrow$  (b) Supongamos ahora que  $\mu$  es estrictamente positiva y que  $\mathcal{M}_\mu$  es de tipo débil (1,1). Dados  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda > 0$ , consideramos

$$B_n = B_{1/n}(x^0) \quad , \quad f_n(x) = \frac{\chi_{B_n}(x)}{\mu(B_n)}.$$

(Notemos que si  $\mu$  no fuera estrictamente positiva podría ocurrir que  $\mu(B_n) = 0$  y este argumento no tendría sentido.) Calculamos  $\mathcal{M}_\mu f_n$ :

$$\mathcal{M}_\mu f_n(x) = \sup_{B \ni x} \frac{\mu(B_{1/n}(x^0) \cap B)}{\mu(B_{1/n}(x^0))\mu(B)}.$$

La acotación de  $\mathcal{M}_\mu$  implica

$$\mu(\{x : \mathcal{M}_\mu f_n(x) > \lambda\}) \leq \frac{C_0}{\lambda} \int f_n d\mu = \frac{C_0}{\lambda}.$$

Si  $\sup \left\{ \frac{\chi_B(x^0)}{\mu(B)} : y \in B \right\} > \lambda$ , entonces, existe una bola  $B$  que verifica  $y, x^0 \in B$  y  $\frac{1}{\mu(B)} > \lambda$ . Hay un número  $n_0 = n_0(B)$  tal que, si  $n \geq n_0$  entonces  $B_{1/n}(x^0) \subset B$  y, por lo tanto,

$$\mathcal{M}_\mu f_n(y) \geq \frac{\mu(B_{1/n}(x^0) \cap B)}{\mu(B_{1/n}(x^0))\mu(B)} = \frac{\mu(B_{1/n}(x^0))}{\mu(B_{1/n}(x^0))\mu(B)} = \frac{1}{\mu(B)} > \lambda.$$

En consecuencia,

$$\left\{x : \sup_{B_x} \frac{\chi_B(x^0)}{\mu(B)} > \lambda\right\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left( \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x : \mathcal{M}_{\mu} f_n(x) > \lambda\} \right),$$

y concluimos,

$$\begin{aligned} \mu\left(\left\{x : \sup_{B_x} \frac{\chi_B(x^0)}{\mu(B)} > \lambda\right\}\right) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} \{x : \mathcal{M}_{\mu} f_n(x) > \lambda\}\right) \\ &\leq \liminf \mu(\{x : \mathcal{M}_{\mu} f_n(x) > \lambda\}) \leq \frac{C_0}{\lambda}. \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (c)

Sea  $B$  una bola abierta en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\mu(B) = 0$ , se deduce de la invarianza bajo rotaciones que  $\mu(S_B) = 0$ .

Si  $\mu(B) > 0$ , llamemos  $x^0$  y  $r$  al centro y al radio de  $B$ , respectivamente. Consideremos el conjunto,

$$X = \{y \in \mathbb{R}^n / |x^0| = |y| \text{ y } |x^0 - y| < r\}.$$

Con el fin de relacionar  $X$  con la condición (b), tomemos  $\epsilon > 0$  y  $\lambda = \frac{1}{\mu(B) + \epsilon}$ . Para cada  $y \in X$ , se tiene que  $x^0 \in B_r(y)$  y  $\mu(B_r(y)) = \mu(B) < \frac{1}{\lambda}$ . Por lo tanto,

$$\bigcup_{y \in X} B_r(y) \subset \left\{x : \sup_{B' \in \mathcal{B}_x} \frac{\chi_{B'}(x^0)}{\mu(B')} > \lambda\right\}.$$

Por otra parte, la conexión con el sector  $S_B$  es también muy clara. Démonos cuenta de que si  $|x^0| \geq r$ , entonces

$$\tilde{S}_B := \left\{x / |x^0| - r < |x| < |x^0| + r, \text{ áng}(x, x^0) < \frac{r}{|x^0|}\right\} \subset \bigcup_{y \in X} B_r(y)$$

y si  $0 < |x^0| < r$ , entonces

$$\tilde{S}_B := S_B \cap \{\text{áng}(x, x^0) < \pi/3 \text{ o } x = (0, 0)\} \subset \bigcup_{y \in X} B_r(y).$$

En ambos casos podemos concluir del hecho de que  $\mu(\tilde{S}_B) \approx \mu(S_B)$  y de la hipótesis (b), que

$$\begin{aligned} \mu(S_B) \approx \mu(\tilde{S}_B) &\leq \mu\left(\bigcup_{y \in X} B_r(y)\right) \leq \mu\left(\left\{x : \sup_{B' \in \mathcal{B}_x} \frac{\chi_{B'}(x^0)}{\mu(B')} > \lambda\right\}\right) \\ &\leq \frac{C_1}{\lambda} = C_1(\mu(B) + \epsilon). \end{aligned}$$

Dejando  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtenemos (c).

(c) $\Rightarrow$ (d)

Dado el anillo  $\{a < |x| < a + 2r\}$ , con  $r \leq 10a$ , consideramos la bola inscrita  $B = B_r(a + r, 0, \dots, 0)$  y su sector asociado,  $S$ . Observemos un sencillo hecho geométrico:

**Lema 1.7**

Sean  $B = B_r(x^0)$ , donde  $0 < r < \frac{10}{11}|x^0|$  y  $0 < \epsilon \leq 1/2$ . Supongamos que  $y \in \partial B \cap \{\partial B_{|x^0| - r + r\epsilon}(0) \cup \partial B_{|x^0| + r - r\epsilon}(0)\}$ . Entonces

$$\text{áng}(y, x^0) \approx \sqrt{\epsilon} \arg(S).$$

( $A \approx B$  indica que existe una constante universal,  $1 \leq C < \infty$ , de modo que  $\frac{1}{C} \leq \frac{A}{B} \leq C$ .)

Antes de probar el lema, continuemos con la prueba de (c) $\Rightarrow$ (d). La hipótesis  $r \leq 10a$  hace que la bola  $B = B_r(a + r, 0, \dots, 0) = B_r(x^0)$  se ajuste bien al enunciado del lema. De acuerdo con éste, podemos elegir  $0 < \epsilon < 1/2$  de modo que,

$$\text{si } x \in B \text{ y } |x| \leq a + r\epsilon \text{ o } |x| \geq a + 2r - r\epsilon, \text{ entonces, } \text{áng}(x, x^0) < \frac{\arg(S)}{(2C_2)^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Entonces, por (c) y nuestra selección de  $\epsilon$ ,

$$\begin{aligned} \mu(\{a < |x| \leq a + \epsilon r, \text{ o } a + 2r - \epsilon r \leq |x| < a + 2r\} \cap \{\text{áng}(x, x^0) < \arg(S)\}) \\ \leq \mu(S) \\ \leq C_2 \mu(B) \end{aligned}$$

(la figura 2 puede aclarar la siguiente desigualdad)

$$\begin{aligned}
&\leq C_2 \mu(\{a < |x| \leq a + \epsilon r, \text{áng}(x, x^0) < \arg(S)/(2C_2)^{\frac{1}{n-1}}\}) + \\
&\quad C_2 \mu(\{a + 2r - \epsilon r \leq |x| < a + 2r, \text{áng}(x, x^0) < \arg(S)/(2C_2)^{\frac{1}{n-1}}\}) + \\
&\quad C_2 \mu(\{a + \epsilon r < |x| < a + 2r - \epsilon r, \text{áng}(x, x^0) < \arg(S)\}) \\
&\leq \frac{1}{2} \mu(\{a < |x| \leq a + \epsilon r, \text{áng}(x, x^0) < \arg(S)\}) + \\
&\quad \frac{1}{2} \mu(\{a + 2r - \epsilon r \leq |x| < a + 2r, \text{áng}(x, x^0) < \arg(S)\}) + \\
&\quad C_2 \mu(\{a + \epsilon r < |x| < a + 2r - \epsilon r, \text{áng}(x, x^0) < \arg(S)\}).
\end{aligned}$$

Hemos usado en la última desigualdad la invarianza bajo rotaciones de  $\mu$ .

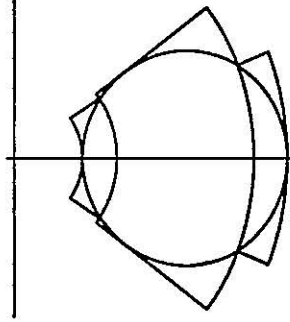


Figura 2

Reorganizando la desigualdad, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\mu(\{a < |x| \leq a + \epsilon r \text{ o } a + 2r - \epsilon r \leq |x| < a + 2r\} \cap \{\text{áng}(x, x^0) < \arg(S)\}) \\
&\leq 2C_2 \mu(\{a + \epsilon r < |x| < a + 2r - \epsilon r, \text{áng}(x, x^0) < \arg(S)\}),
\end{aligned}$$

y, de nuevo por la invarianza de  $\mu$ , se concluye que

$$\begin{aligned}
&\mu(\{x : a < |x| \leq a + \epsilon r \text{ o } a + 2r - \epsilon r \leq |x| < a + 2r\}) \\
&\leq 2C_2 \mu(\{a + \epsilon r < |x| < a + 2r - \epsilon r\}).
\end{aligned}$$

Repetimos el mismo argumento con el anillo

$$\{a + \epsilon r < |x| < a + 2r - \epsilon r\} = \{a_1 < |x| < a_1 + 2r_1\},$$

y luego con

$$\{a_1 + \epsilon r_1 < |x| < a_1 + 2r_1 - \epsilon r_1\} = \{a_2 < |x| < a_2 + 2r_2\}, \dots,$$

notando que, si  $a_k < a + \frac{r}{2}$ , entonces,  $r_k > \frac{r}{2}$ , y que la primera vez que ocurra que  $a_k \geq a + r/2$  debemos detener el proceso. En unos cuantos pasos ( $\sim \frac{1}{\epsilon}$ ) obtenemos (d).



DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1.7:

Podemos suponer, sin perder generalidad, que  $r = 1$  y  $x^0 = (x_1^0, 0, \dots, 0)$ ,  $|x^0| = x_1^0 > \frac{11}{10}$ . Escribimos  $y$  en la forma  $y = (y_1, \bar{y})$ ,  $y_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

A) Si  $y \in \partial B \cap \partial B_{|x^0|-1+\epsilon}(0)$ , se tiene,

$$|\tan(\arg(y, x^0))| = \frac{|\bar{y}|}{|y_1|} \approx \frac{|\bar{y}|}{|x^0|},$$

y que

$$|\sin(\arg(S))| = \frac{1}{|x^0|}.$$

Así pues, lo que queremos probar es

$$|\bar{y}| \approx \sqrt{\epsilon}.$$

Esta equivalencia es casi evidente, pero quizá convenga hacer unas cuentas.

$$1 - |x_1^0 - y_1|^2 = |\bar{y}|^2 = (|x^0| - 1 + \epsilon)^2 - |y_1|^2.$$

Despejando,

$$1 - |x_1^0 - y_1| = (|x^0| - 1 + \epsilon - y_1) \frac{|x^0| - 1 + \epsilon + y_1}{1 + |x_1^0 - y_1|} \geq C(|x^0| - 1 + \epsilon - y_1).$$

Además,  $[1 - |x_1^0 - y_1|] + [|x^0| - 1 + \epsilon - y_1] = 1 - x_1^0 + y_1 + x_1^0 - 1 + \epsilon - y_1 = \epsilon$ , y todo esto implica que  $1 - |x_1^0 - y_1| \approx \epsilon$ , es decir,  $|\bar{y}| \approx \sqrt{\epsilon}$ .

B) Sea  $y \in \partial B \cap \partial B_{|x^0|+1-\epsilon}(0)$ . Queremos ver que  $|\bar{y}| \approx \sqrt{\epsilon}$ . En este caso,  $y_1 > x_1^0$ , y entonces  $[1 - |x_1^0 - y_1|] - [|x^0| + 1 - \epsilon - y_1] = 1 - y_1 + x_1^0 - x_1^0 - 1 + \epsilon + y_1 = \epsilon$ , por lo que  $1 - |x_1^0 - y_1| \geq \epsilon$ . Si comprobamos que  $1 - |x_1^0 - y_1| \geq C(|x^0| + 1 - \epsilon - y_1)$ , con una constante  $C > 1$ , entonces,  $\epsilon = [1 - |x_1^0 - y_1|] - [|x^0| + 1 - \epsilon - y_1] \geq [1 - |x_1^0 - y_1|][1 - 1/C]$ , de donde deducimos que  $1 - |x_1^0 - y_1| \approx \epsilon$ , y por lo tanto,  $|\bar{y}| \approx \sqrt{\epsilon}$ . Como antes,

$$1 - |x_1^0 - y_1| = (|x^0| + 1 - \epsilon - y_1) \frac{|x^0| + 1 - \epsilon + y_1}{1 + |x_1^0 - y_1|} \geq C(|x^0| + 1 - \epsilon - y_1),$$

donde

$$\begin{aligned} C &= \inf_{\substack{11/10 < |x^0| \leq y_1 \leq |x^0|+1 \\ 0 \leq \epsilon \leq 1/2}} \frac{|x^0| + 1 - \epsilon + y_1}{1 + |x_1^0 - y_1|} \geq \inf_{11/10 < |x^0| \leq y_1 \leq |x^0|+1} \frac{|x^0| + 1/2 + y_1}{1 - |x^0| + y_1} \\ &\geq \inf_{|x^0| > 11/10} \frac{2|x^0| + 1/2}{2} = \frac{27}{20} > 1. \end{aligned}$$

(Para convencernos de que  $y_1 > x_1^0$ , hagamos un dibujo con  $B$  y  $B_{|x^0|+1-\epsilon}(0)$ . Marquemos  $z = (x_1^0 - 1, 0, \dots, 0)$ . Si  $y_1$  fuera menor o igual que  $x_1^0$ , entonces,  $|z - y| \leq \sqrt{2}$  y por lo tanto,  $|y| \leq |z - y| + |z| \leq \sqrt{2} + |x^0| - 1 < |x^0| + 1 - \epsilon = |y|$ .)•

(d) $\Rightarrow$ (e)

Denotemos  $B = B_s(x^0)$ ,  $2B = B_{2s}(x^0)$ .

$$\begin{aligned} \mu(2B) &\leq \mu(S_{2B}) \\ &= \mu\left(\left\{x / |x^0| - 2s < |x| < |x^0| + 2s, \text{ áng}(x, x^0) < \arcsen \frac{2s}{|x^0|}\right\}\right) \\ &\leq c\left(\frac{2s}{|x^0|}\right)^{n-1} \mu(\{x / |x^0| - 2s < |x| < |x^0| + 2s\}), \end{aligned}$$

debido a la invarianza bajo rotaciones.

Podemos aplicar (d) dos veces, primero a  $\{x / |x^0| - 2s < |x| < |x^0| + 2s\}$  y luego a  $\{x / |x^0| - s < |x| < |x^0| + s\}$ , y la última expresión queda mayorada por

$$\begin{aligned} &cC_3^2 \left(\frac{2s}{|x^0|}\right)^{n-1} \mu(\{x / |x^0| - s/2 < |x| < |x^0| + s/2\}) \\ &\leq CC_3^2 \mu\left(\left\{x / |x^0| - \frac{s}{2} < |x| < |x^0| + \frac{s}{2}, \text{ áng}(x, x^0) < c \frac{s}{|x^0|}\right\}\right). \end{aligned}$$

Ahora bien, si elegimos  $c$  adecuadamente, entonces

$$\left\{x / |x^0| - \frac{s}{2} < |x| < |x^0| + \frac{s}{2}, \text{ áng}(x, x^0) < c \frac{s}{|x^0|}\right\} \subset B.$$

(Notemos que si  $y \in \partial B \cap \{x / |x| = |x^0| - \frac{s}{2}\}$  y  $z \in \partial B \cap \{x / |x| = |x^0| + \frac{s}{2}\}$ , entonces, (véase figura 3)

$$\left\{x / |x^0| - \frac{s}{2} < |x| < |x^0| + \frac{s}{2}, \text{ áng}(x, x^0) < \min[\text{áng}(y, x^0), \text{áng}(z, x^0)]\right\} \subset B.$$

Además, por el lema 1.7,  $\text{áng}(y, x^0), \text{áng}(z, x^0) > c \arg(S_B) \geq c \frac{s}{|x^0|}$ .) Por tanto

$$\mu(2B) \leq CC_3^2 \mu(B).$$

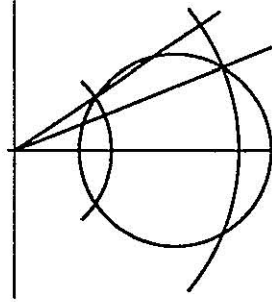


Figura 3

(e) $\Rightarrow$ (c)

Sea  $B = B_r(x^0)$ . Supongamos que  $x^0 = (x_1^0, 0, \dots, 0)$ .

*Caso 1.*  $r \leq \frac{|x^0|}{4}$

Notemos que si  $r$  y  $|x^0|$  cumplen esta relación, entonces, por el mismo razonamiento dado arriba, existe una constante  $c > 0$  tal que,

$$\hat{S}_B := \left\{ |x^0| - r < |x| < |x^0| + r, \text{ áng}(x, x^0) < c \frac{r}{|x^0|} \right\} \subset 2B$$

y, por lo tanto,

$$\mu(S_B) \approx \mu(\hat{S}_B) \leq \mu(2B) \leq C_4 \mu(B).$$

*Caso 2.*  $\frac{|x^0|}{4} < r \leq |x^0|$

Consideremos dos bolas auxiliares:

$$B_1 = B_{\frac{|x^0|}{3}-r}(\frac{4}{3}(|x^0| - r), 0, \dots, 0) = B_{r_1}(x^1),$$

$$B_2 = B_{\frac{|x^0|}{3}+r}(\frac{4}{3}(|x^0| + r), 0, \dots, 0) = B_{r_2}(x^2).$$

(si  $r = |x^0|$  sólo hay que trabajar con  $B_2$ .) Ambas se encuentran en la situación del caso 1, y por lo tanto

$$\mu(B) \geq \sum_{i=1}^2 \mu(B_i) \geq CC_4 \sum \mu(S_{B_i}).$$

Además,  $\arg(S_{B_i}) = \arcsen \frac{1}{4}$ ,  $i = 1, 2$ , y por la invarianza podemos prolongar la cadena de desigualdades,

$$\geq CC_4 \mu(\{|x^0| - r < |x| < 5/3(|x^0| - r)\}) + CC_4 \mu(\{3/5(|x^0| + r) < |x| < |x^0| + r\}).$$

Queda por acotar la medida de un trozo de sector. En un momento probaremos que existe una constante  $c > 0$ , tal que,

$$\{5/3(|x^0| - r) < |x| < 3/5(|x^0| + r), \text{ áng}(x, x^0) < c\} \subset B,$$

y la invarianza por rotaciones nos permitirá acabar el estudio de este caso.

Para probar la última inclusión veamos que si  $y \in \partial B \cap \{|x| = \frac{5}{3}(|x^0| - r)\}$  y  $z \in \partial B \cap \{|x| = 3/5(|x^0| + r)\}$ , entonces  $\text{áng}(y, x^0), \text{áng}(z, x^0) > C$ . En este caso no hace falta (ni podemos) recurrir al lema 1.7. El hecho de que  $B_1$  esté inscrita entre  $\partial B$  y  $\{|x| = \frac{5}{3}(|x^0| - r)\}$  debería bastar para convencernos de que  $|\bar{y}| > \frac{1}{3}(|x^0| - r)$  (véase figura 4), lo cual añadido al hecho de que  $y_1 < \frac{5}{3}(|x^0| - r)$ , resuelve nuestras dudas sobre  $y$ .  $B_2$  hace el papel correspondiente en el caso de  $z$ .

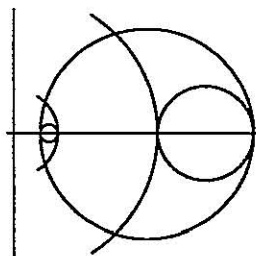


Figura 4

Caso 3.  $|x^0| < r$

Tomemos

$$\hat{B} = B_{\frac{|x^0|+r}{2}}\left(\frac{|x^0|+r}{2}, 0, \dots, 0\right).$$

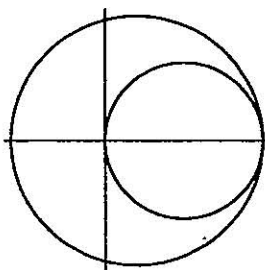


Figura 5:  $\hat{B}$  es la bola pequeña;  $B$  es la grande.

Como  $\hat{B}$  es una de las bolas del caso 2,  $\mu(S_{\hat{B}}) \leq C\mu(\hat{B})$ . Además

$$\mu(S_B) \approx \mu(S_{\hat{B}}) + \mu(\{(0, 0)\}),$$

y para terminar s3lamente tenemos que darnos cuenta de que  $\hat{B} \cup \{(0, 0)\} \subset B$ .

(c)+(d)+(e) $\Rightarrow$ (a)

Es evidente que de (d) se deduce que, o bien  $\mu$  es estrictamente positiva, o bien es un m3ltiplo de la delta de Dirac en 0. Pasemos a probar la acotaci3n de  $\mathcal{M}_\mu$  asumiendo la positividad estricta.

Clasificamos las bolas de  $\mathbb{R}^n$  en dos familias:

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ B = B_r(x^0) \mid r \leq \frac{|x^0|}{8} \right\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ B = B_r(x^0) \mid r > \frac{|x^0|}{8} \right\}.$$

Definimos

$$\mathcal{M}_\mu^1 f(x) = \sup_{\substack{x \in B \\ B \in \mathcal{F}_1}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y).$$

Observemos que, si  $B \in \mathcal{F}_2$ , entonces,  $\arg(S_B) \geq \arcsen \frac{1}{8}$ , de manera que por (c) y la invarianza bajo rotaciones de  $\mu$ ,

$$\mu(B) \geq C_2^{-1} \mu(S_B) \geq C_2^{-1} C \mu(\{|x^0| - r < |x| < |x^0| + r\}).$$

Esta es la raz3n por la que definimos un nuevo operador maximal:

$$\mathcal{M}_\mu^2 f(x) = \sup_{A_x} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f(y)| d\mu(y),$$

donde

$$A_x = \{ A, \text{ anillos abiertos centrados en el origen} : x \in A \}.$$

Acabamos de ver que

$$\mathcal{M}_\mu f(x) \leq \mathcal{M}_\mu^1 f(x) + C \mathcal{M}_\mu^2 f(x).$$

Debemos probar la acotaci3n de  $\mathcal{M}_\mu^1$  y  $\mathcal{M}_\mu^2$ .

$\mathcal{M}_\mu^1$  es sencillo de tratar; la condici3n de ser doblante fuera del origen, (e), nos permite escribir una prueba de su acotaci3n copiando la habitual para medidas doblantes: sean  $f \in L^1(\mu)$ , que podemos suponer positiva y  $\lambda > 0$ . Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $\{x : \mathcal{M}_\mu^1 f(x) > \lambda\}$ . Se puede cubrir  $K$  con una familia finita de bolas,  $\{B_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{F}_1$ , tales que,

$$\frac{1}{\mu(B_i)} \int_{B_i} f d\mu > \lambda.$$

Tomamos  $\hat{B}_1 = B_{i_1}$ , que cumple:  $\text{radio}(B_{i_1}) = \sup\{\text{radio}(B_j) / 1 \leq j \leq N\}$ .  
Tomamos  $\hat{B}_2 = B_{i_2}$ , que cumple:  $\text{radio}(B_{i_2}) = \sup\{\text{radio}(B_j) / B_j \cap \hat{B}_1 = \emptyset\}$ .  
Tomamos  $\hat{B}_3 = B_{i_3}$ , que cumple:  $\text{radio}(B_{i_3}) = \sup\{\text{radio}(B_j) / B_j \cap (\hat{B}_1 \cup \hat{B}_2) = \emptyset\}$   
...

Al final del proceso, si  $B_j$  no ha sido seleccionada, entonces, existe  $l$  tal que  $\hat{B}_l \cap B_j \neq \emptyset$  y  $\text{radio}(B_j) \leq \text{radio}(\hat{B}_l)$ , y por tanto,  $B_j \subset 3\hat{B}_l$  (donde  $3\hat{B}_l$  es la bola con el mismo centro que  $\hat{B}_l$  y radio triple). En consecuencia

$$\mu(K) \leq \mu(\cup B_j) \leq \mu(\cup 3\hat{B}_l) \leq \sum_l \mu(3\hat{B}_l).$$

Usando ahora (e) dos veces sucesivas, deducimos

$$\mu(K) \leq \sum_l C_4^2 \mu(\hat{B}_l) < \frac{C_4^2}{\lambda} \sum \int_{\hat{B}_l} f d\mu \leq \frac{C_4^2}{\lambda} \int f d\mu.$$

Para acabar, como  $\mu$  es regular,

$$\begin{aligned} \mu(\{x : \mathcal{M}_\mu f(x) > \lambda\}) &= \sup \{ \mu(K) : K \text{ compacto}, K \subset \{x : \mathcal{M}_\mu f(x) > \lambda\} \} \\ &\leq \frac{C_4^2}{\lambda} \int f d\mu. \end{aligned}$$

Para demostrar que  $\mathcal{M}_\mu^2$  es acotado, usamos el siguiente lema de cubrimiento, cuya demostración, semejante al caso en dimensión 1, es sencilla.

### Lema de cubrimiento 1.8

Dada cualquier familia finita de anillos centrados en 0,  $\mathcal{A}$ , existe una subfamilia  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ , tal que

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \quad \text{y} \quad \sum_{A \in \mathcal{A}'} \chi_A \leq 2.$$

La prueba se completa como sigue: Sea  $f \in L^1(\mu)$ ,  $f \geq 0$  y  $\lambda > 0$ . Dado un compacto  $K \subset \{x : \mathcal{M}_\mu^2 f(x) > \lambda\}$ , podemos cubrirlo con una familia finita de anillos centrados en 0,  $\mathcal{A}$ , de modo que

$$K \subset \bigcup_A A \quad \text{y} \quad \frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu > \lambda.$$

Tomamos una subfamilia  $\mathcal{A}'$  como en el lema, y resulta que

$$\mu(K) \leq \mu\left(\bigcup_{\mathcal{A}'} A\right) \leq \sum_{\mathcal{A}'} \mu(A) \leq \sum_{\mathcal{A}'} \frac{1}{\lambda} \int_A f d\mu = \frac{1}{\lambda} \int f \sum_{\mathcal{A}'} \chi_A d\mu \leq \frac{2}{\lambda} \int f d\mu.$$

(c)+(d) $\Rightarrow$ (f)

En primer lugar probaremos que podemos encontrar una constante  $\kappa$  tal que, si tenemos dos bolas  $B_1$  y  $B_2$ ,  $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ , con sectores  $S_1, S_2$ ,  $\arg(S_i) = \theta_i$  y  $\theta_1 > \kappa\theta_2$  entonces  $\mu(B_1) \geq 2\mu(B_2)$ :

Si  $B_i = B_{r_i}(x^i)$ , entonces,  $\theta_1 > \kappa\theta_2$  implica que  $2\pi > \kappa\theta_2$ , de forma que  $r_2 \leq \frac{|x^2|}{1000}$  (tomando la constante  $\kappa$  bastante grande). Además se puede probar que  $r_1 \geq 10r_2$ :

En efecto, para que  $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$  es necesario que

$$|x^2| \leq |x^1| + r_1 + r_2 \leq |x^1| + r_1 + \frac{|x^2|}{1000},$$

y podemos despejar  $|x^2|$ , obteniendo  $|x^2| \leq \frac{1000}{999}(|x^1| + r_1)$ . Si  $|x^1| \leq r_1/10$ , entonces  $|x^2| \leq \frac{1000}{999} \frac{11}{10} r_1 \leq 2r_1$  y por tanto,  $r_2 \leq \frac{|x^2|}{1000} \leq \frac{r_1}{500}$ . Si  $|x^1| > r_1/10$ , entonces  $|x^2| \leq \frac{1000}{999} 11|x^1|$ ; además, el hecho de que  $\theta_1 > \kappa\theta_2$  implica que  $\frac{r_1}{|x^1|} \geq c\kappa \frac{r_2}{|x^2|}$ , de manera que, si  $\kappa$  es grande,  $r_1 \geq c\kappa \frac{r_2|x^1|}{|x^2|} \geq c\kappa \frac{r_2|x^1|}{11000|x^1|/999} \geq 10r_2$ , que es lo que queríamos probar. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \{|x^2| - 10r_2 \leq |x| \leq |x^2| - r_2, |\arg(x)| < \theta_1\} &\subset S_1 & \text{si } |x^1| < |x^2|, \\ \{|x^2| + r_2 \leq |x| \leq |x^2| + 10r_2, |\arg(x)| < \theta_1\} &\subset S_1 & \text{si } |x^1| \geq |x^2|. \end{aligned}$$

En el primer caso

$$\mu(B_2) \leq \mu(S_2) = \frac{\theta_2}{\pi} \mu(\{|x^2| - r_2 < |x| < |x^2| + r_2\}).$$

Puesto que  $r_2 \leq |x^2|/1000$ , podemos aplicar (d) con  $r = 4r_2$ ,  $a = |x^2| - 7r_2$ ,

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\theta_2}{\pi} C_3 \mu(\{|x^2| - 5r_2 < |x| < |x^2| - r_2\}) \\ &= \frac{\theta_2}{\theta_1} C_3 \mu(S_1) \end{aligned}$$

y, aplicando (c)

$$\leq \kappa^{-1} C_3 C_2 \mu(B_1) \leq \frac{1}{2} \mu(B_1),$$

eligiendo una  $\kappa$  adecuada.

La prueba en el segundo caso,  $|x^1| \geq |x^2|$  es similar.

Ahora tenemos los elementos necesarios para probar (f). Sea  $B = B_r(x^0)$ , y denotemos por  $B'$  una bola cualquiera de  $\mathfrak{B}_B$  y  $\arg(S_B) = \theta$ ,  $\arg(S_{B'}) = \theta'$ . Si  $\theta > \kappa\theta'$ , entonces  $\mu(B') \leq \frac{1}{2}\mu(B)$ . Podemos escoger otra bola  $B''$  tal que  $B' \subset B''$ ,  $\theta = \kappa\theta''$  y  $B'' \in \mathfrak{B}_B$ . Además, si  $\theta' > \kappa\theta$ , entonces  $\mu(B') \geq 2\mu(B)$ , y en consecuencia  $B' \notin \mathfrak{B}_B$ . Así pues, sólo tenemos que preocuparnos por las bolas,  $B' \in \mathfrak{B}_B$  con  $\kappa^{-1}\theta \leq \theta' \leq \kappa\theta$ .

De entre todas ellas, elegimos dos

$B'_i$  es la más cercana al origen;

$B'_e$ , con centro  $x^e$  y radio  $r_e$ , tal que,  $|x^e| + r_e$  es máximo.

(Al final de la prueba haremos un comentario sobre esta elección.) Si  $B' \in \mathfrak{B}_B$  con  $\kappa^{-1}\theta \leq \theta' \leq \kappa\theta$ , entonces, existe una constante  $c(\kappa) \sim \kappa^2$  para la que se cumple que

$$B' \subset c(\kappa)S_{B'_i} \cup c(\kappa)S_{B'_e} \cup c(\kappa)S_B$$

donde  $c(\kappa)S_B$  denota el sector

$$\{x \in \mathbb{R}^2 / |x^0| - r < |x| < |x^0| + r \text{ y } |\arg(x) - \arg(x^0)| < c(\kappa) \arg(S_B)\}$$

y lo análogo para  $c(\kappa)S_{B'_i}$ , y  $c(\kappa)S_{B'_e}$ .

Usando la invarianza de  $\mu$  y (c) de nuevo,

$$\begin{aligned} \mu \left( \bigcup_{\mathfrak{B}_B} B' \right) &\leq \mu(c(\kappa)S_{B'_i} \cup c(\kappa)S_{B'_e} \cup c(\kappa)S_B) \\ &\leq c(\kappa)^{n-1} C_2 (\mu(B'_i) + \mu(B'_e) + \mu(B)) \\ &\leq 3c(\kappa)^{n-1} C_2 \mu(B). \end{aligned}$$

Podría ocurrir, y en el caso de  $B'_e$  siempre es así, que la elección de las bolas  $B'_i$  y  $B'_e$  no fuera posible, debido a la condición de maximalidad que las define. Pero no tenemos que modificar mucho nuestro argumento para terminar la prueba correctamente. Si  $P = \sup\{|y| + t : B_t(y) \in \mathfrak{B}_B\}$  debemos tomar una sucesión  $\{B'_n\} = \{B_{t_n}(y^n)\}$  que verifique que  $|y^n| + t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P$ . Denotemos

$$\mathfrak{B}_B^n = \{B' = B_t(y) \in \mathfrak{B}_B : |y| + t \leq |y^n| + t^n\}.$$



Entonces,

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{\mathfrak{B}_B^n} B'\right) &\leq \mu(c(\kappa)S_{B'_i} \cup c(\kappa)S_{B'_n} \cup c(\kappa)S_B) \\
&\leq c(\kappa)^{n-1}C_2(\mu(B'_i) + \mu(B'_n) + \mu(B)) \\
&\leq 3c(\kappa)^{n-1}C_2\mu(B).
\end{aligned}$$

y

$$\mu\left(\bigcup_{\mathfrak{B}_B} B'\right) = \lim \mu\left(\bigcup_{\mathfrak{B}_B^n} B'\right) \leq 3c(\kappa)^{n-1}C_2\mu(B).$$

(f) $\Rightarrow$ (c)

Notemos que  $S_B \subset \mathfrak{B}_B$ .

•

#### §4. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.6

Las hipótesis sobre el soporte de  $\mu$ , que hemos denotado por  $\mathcal{D}$ , implican que existen  $\tau, \gamma, \rho > 0$  tales que  $\mu$  verifica una de estas dos propiedades:

- (a)  $\mu$  es estrictamente positiva en  $\{\tau - \gamma \leq |x| \leq \tau\}$  y  $\mu(\{\tau < |x| < \tau + \rho\}) = 0$ .
- (b)  $\mu$  es estrictamente positiva en  $\{\tau \leq |x| \leq \tau + \gamma\}$  y  $\mu(\{\tau - \rho < |x| < \tau\}) = 0$ .

Probaremos primero el teorema en el caso de que  $\mu$  verifique (a). Al final de la prueba indicaremos las modificaciones que son necesarias para el caso (b).

- (a)  $\mu$  ES Estrictamente positiva en  $\{\tau - \gamma \leq |x| \leq \tau\}$   
 $\forall \mu(\{\tau < |x| < \tau + \rho\}) = 0$ :

Por dilatación, podemos suponer que  $\tau = 2$ . Para probar el teorema hacemos un razonamiento por reducción al absurdo. Suponemos que  $\mathcal{M}_\mu$  es de tipo débil (1,1) respecto a  $\mu$ . Consideramos otros operadores maximales

$$\tilde{\mathcal{M}}_\mu^p f(x) = \begin{cases} \sup_{S \in \mathcal{S}_x^p} \frac{1}{\mu(S)} \int_S |f| d\mu & \text{si } 2 - \min\left(\frac{\gamma}{3}, \frac{1}{100}, \left(\frac{\rho}{200}\right)^{\frac{1}{2p-1}}\right) < |x| \leq 2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde  $1/2 < p < 1$  y

$$\mathcal{S}_x^p = \left\{ \begin{array}{l} S \text{ sectores : } x \in S, S = \{y : 2 - \alpha < |y| \leq 2, \text{ áng}(y, y^0) < \beta\} \\ \text{para cualesquiera } \alpha, \beta > 0, \\ \text{con } \alpha \leq \min\left(\frac{\gamma}{3}, \frac{1}{100}, \left(\frac{\rho}{200}\right)^{\frac{1}{2p-1}}\right), 10\alpha \leq \beta \leq \alpha^p \end{array} \right\}$$

Probaremos que

- (1) Existe una constante  $C_\mu > 0$  tal que  $\tilde{\mathcal{M}}_\mu^p f(x) \leq C_\mu \mathcal{M}_\mu f(x)$ , para todo  $p \in (1/2, 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $f \in L_{\text{loc}}^1(\mu)$ .
- (2)  $\tilde{\mathcal{M}}_\mu^p$  no es de tipo débil (1,1) respecto a  $\mu$ .

Esto contradice nuestra suposición de que  $\mathcal{M}_\mu$  es de tipo débil (1,1) y completa el razonamiento.

DEMOSTRACIÓN DE (1):

Fijemos  $p$ ,  $1/2 < p < 1$ . Dado un sector  $S \in \mathcal{S}_x^p$ ,

$$S = \{y : 2 - \alpha < |y| \leq 2, \text{áng}(y, y^0) < \beta\},$$

buscamos una bola  $B_S$  que contenga a  $S$  y tal que  $\mu(B_S) \leq C_\mu \mu(S)$  (con  $C_\mu$  independiente de  $S$ ). Eso bastará para demostrar lo que deseamos.

Debido a que hemos supuesto que  $\mathcal{M}_\mu$  es acotado, existe una constante  $\tilde{C}_3$ , tal que, si  $2 - \gamma \leq a + r \leq 2$ ,  $r \leq 10a$ , se tiene

$$(\tilde{d}) \quad \mu(\{a < |x| < a + 2r\}) \leq \tilde{C}_3 \mu(\{a + \frac{r}{2} < |x| < a + \frac{3r}{2}\}).$$

Para probar esto tenemos que repetir la prueba de (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) del teorema 1.1, notando que, puesto que  $\mu$  es estrictamente positiva en  $\mathcal{D}$ , todo es válido si sólo consideramos bolas centradas en puntos de  $\mathcal{D}$ .

Volviendo a  $S$ , demostraremos que existe una bola  $B_S$ ,  $S \subset B_S$ , tal que,

$$D \cap B_S \subset \{y : 2 - 3\alpha < |y| \leq 2, \text{áng}(y, y^0) < 6\beta\}.$$

La aplicación de la propiedad  $(\tilde{d})$  nueve veces (que está permitida, porque  $\alpha \leq \gamma/3$ ) y la invarianza bajo rotaciones de  $\mu$  nos darán como resultado que  $\mu(B_S) \leq C_\mu \mu(S)$ .

Esta parte de la prueba es bastante técnica y requiere algo de imaginación. Asumamos que  $y^0 = (y_1^0, 0, \dots, 0)$ . Consideremos dos conjuntos especiales,

$$\mathcal{V}_1 = \{x : |x| = 2 - \alpha, \text{áng}(x, y^0) = \beta\},$$

$$\mathcal{V}_2 = \{x : |x| = 2, \text{áng}(x, y^0) = \beta\}.$$

y un punto,  $x^0 = (2 - 3\alpha, 0, \dots, 0)$ .

Sean  $B_1$  y  $B_2$  las dos bolas definidas por

$$x^0 \in \partial B_i \quad \mathcal{V}_i \subset \partial B_i \quad i = 1, 2.$$

Notemos que, si  $z \in \mathcal{V}_1$ ,  $z = (z_1, \bar{z})$  con  $z_1 \in \mathbb{R}$  y  $\bar{z} \in \mathbb{R}^{n-1}$ , entonces  $z_1 > 2 - 2\alpha$  :  $(2 - \alpha) \cos \beta = |\bar{z}| > 2 - 2\alpha \Leftrightarrow \cos \beta > \frac{2-2\alpha}{2-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2-\alpha} \Leftrightarrow 1 - \cos \beta < \frac{\alpha}{2-\alpha}$ . Ahora bien,  $1 - \cos \beta < \frac{\beta^2}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2-\alpha}$ .

Por esta razón podemos asegurar que el centro de  $B_i$  está más alejado del origen que  $x^0$  y en consecuencia,

$$\{|x| \leq 2\} \cap B_i \subset \{y : 2 - 3\alpha < |y| \leq 2\}, \quad i = 1, 2. \quad (\text{Figura 6})$$

$B_1$  y  $B_2$  son tangentes en  $x^0$ , de modo que la mayor de ellas contiene a la otra y además, por la posición de sus centros, a  $S$ . Sólo hace falta comprobar que  $\mathcal{D} \cap B_i \subset \{y : 2 - 3\alpha < |y| \leq 2, \text{áng}(y, y^0) < 6\beta\}$ ,  $i = 1, 2$ , y escoger  $B_S = B_1 \cup B_2$ , que es la más grande de las dos.

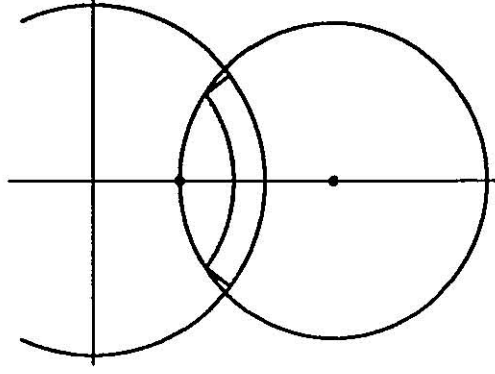


Figura 6

Queremos, en primer lugar, asegurarnos de que  $\mathcal{D} \cap B_i \subset \{y : |y| \leq 2\}$ , con lo que quedará probado que  $\mathcal{D} \cap B_i \subset \{y : 2 - 3\alpha < |y| \leq 2\}$ . Para ello basta mostrar que  $\text{radio}(B_i) \leq 100\alpha^{2p-1} \leq \rho/2$  (ya que  $\mathcal{D} \subset \{y : |y| \leq 2\} \cup \{y : |y| \geq 2 + \rho\}$ ). Esto es un cálculo sencillo: Si  $z \in \mathcal{V}_i$  y  $u^i = (u_1^i, 0, \dots, 0)$  es el centro de  $B_i$  y  $r_i$  su radio,

$$\begin{aligned} r_i &= |u^i - z| = \sqrt{(u_1^i - z_1)^2 + |\bar{z}|^2} = \sqrt{[x_1^0 + r_i - z_1]^2 + |\bar{z}|^2} \\ &\leq \sqrt{[r_i - C_z \alpha]^2 + 4\beta^2} \leq \sqrt{[r_i - C_z \alpha]^2 + 4\alpha^{2p}} \end{aligned}$$

con  $C_z \sim 1$  (recordemos que antes vimos que  $z_1 \geq 2 - 2\alpha$  y está claro que  $z_1 \leq 2$ ). Elevando al cuadrado,  $r_i^2 \leq r_i^2 - 2C_z \alpha r_i + C_z^2 \alpha^2 + 4\alpha^{2p}$ , de donde,  $r_i \leq 100\alpha^{2p-1}$ .

Por último, probaremos que  $\mathcal{D} \cap B_i \subset \{\text{áng}(y, y^0) < 6\beta\}$ . Sea  $y \in \partial B_i \cap \mathcal{D}$ ,  $y = (y_1, \bar{y})$ . Entonces,  $y_1 \geq 2 - 3\alpha > 1$  y por tanto es suficiente ver que  $|\bar{y}| < 6\text{sen}\beta$ . Hagámonos una imagen de  $B_1$  y  $B_2$ . Sus centros están en el eje  $0X_1$ , a distancia mayor que 2 del origen. Esto se debe a que si  $z \in \mathcal{V}_i$ , entonces,  $|\bar{z}| \geq \text{sen}\beta \geq \beta/2$  por lo que el radio de  $B_i$  es al menos  $\beta/2$ . Hemos denotado el centro de  $B_i$  por  $u^i = (u_1^i, 0, \dots, 0)$ ; entonces  $u_1^i = x_1^0 + \text{radio}(B_i) \geq 2 - 3\alpha + \beta/2 \geq 2$ , a causa de las hipótesis sobre  $\alpha$  y  $\beta$ .

Si  $y \in \partial B_2 \cap \mathcal{D}$ , puesto que el centro de  $B_2$  dista del origen más de 2, podemos asegurar que  $|\bar{y}| \leq |\bar{z}|$  para cualquier punto  $z \in \mathcal{V}_2$ , de forma que  $|\bar{y}| \leq 2\text{sen}\beta$ .

Si  $y \in \partial B_1 \cap \mathcal{D}$ , hay que trabajar un poco más. Tomemos  $z \in \mathcal{V}_1$ . Si  $z_1 > y_1$ , entonces  $|\bar{y}| \leq |\bar{z}| \leq 2\text{sen}\beta$  (porque la distancia del centro de  $B_1$  al origen es mayor

que 2). Si  $z_1 \leq y_1$ , se debe cumplir que  $\frac{|\bar{z}-\bar{x}^0|}{|z_1-x_1^0|} \geq \frac{|\bar{y}-\bar{x}^0|}{|y_1-x_1^0|}$  (esto no es más que un modo de decir que una bola es una figura convexa). Así pues,

$$|\bar{y}| = |\bar{y} - \bar{x}^0| \leq \frac{|\bar{z}|}{|z_1 - x_1^0|} |y_1 - x_1^0| \leq \frac{2\text{sen}\beta}{\alpha} 3\alpha = 6\text{sen}\beta.$$

#### DEMOSTRACIÓN DE (2):

Esta prueba es una variación sobre un contraejemplo que prueba que el operador maximal fuerte no es de tipo débil (1,1).

Fijamos un sector

$$S_{\epsilon, \delta} = \{x : 2 - \epsilon < |x| \leq 2, \text{áng}(x, x^0) < \delta\},$$

donde  $x^0 = (1, 0, \dots, 0)$  y más adelante elegiremos  $\delta$  en función de  $\epsilon$ . Haremos actuar  $\tilde{\mathcal{M}}_\mu^p$  sobre su función característica,

$$f_{\epsilon, \delta} = \chi_{S_{\epsilon, \delta}}.$$

Definimos el siguiente sector

$$S^0 = S_\delta^0 = \{x : 2 - \min\left(\frac{1}{100}, \frac{\gamma}{3}, \left(\frac{\rho}{100}\right)^{\frac{1}{2p-1}}\right) < |x| \leq 2, \text{áng}(x, x^0) < \delta\}.$$

Debido a la invarianza bajo rotaciones el número  $r(\epsilon) = \frac{\mu(S_\delta^0)}{\mu(S_{\epsilon, \delta})}$  no depende de  $\delta$ . Además  $r(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty$ , ya que  $\mu(\{|x| = 2\}) = 0$ , como se deduce de ( $\tilde{d}$ ).

Construimos una sucesión decreciente y positiva,  $\{\alpha_k\}_{k \geq 1}$ , de manera que,

$$S^k = S_\delta^k = \{x : 2 - \alpha_k < |x| \leq 2, \text{áng}(x, x^0) < 2^k \delta\}$$

cumpla  $\mu(S^k) = \mu(S^0) = r(\epsilon)\mu(S_{\epsilon, \delta})$  siempre que  $2^k \delta \leq 2\pi$ . El hecho de que  $\mu$  verifique ( $\tilde{d}$ ) hace que la función  $\phi(\alpha) = \mu(\{2 - \alpha < |x| \leq 2\})$  sea continua y podamos encontrar tal sucesión.

Queremos que estos sectores contengan a  $S_{\epsilon, \delta}$ , es decir, que  $\alpha_k \geq \epsilon$ . Por la invarianza de  $\mu$  se tiene, para  $k \geq 1$  en la situación anterior,

$$\mu(\{x : 2 - \epsilon < |x| < 2, \text{áng}(x, x^0) < 2^k \delta\}) = 2^{k(n-1)} \mu(S_{\epsilon, \delta}).$$

En consecuencia,  $\alpha_k \geq \epsilon$  si y sólo si  $2^{k(n-1)} \leq r(\epsilon)$ . Por esta razón sólo conservamos los sectores  $\{S^k\}_{k=1}^{N(\epsilon)}$ , donde  $N(\epsilon) = \left\lceil \frac{1}{n-1} \log_2 r(\epsilon) \right\rceil$ .

Definimos

$$\mathcal{I}_\epsilon = \{k \leq N(\epsilon) / S^k \in \cup S_\epsilon^p\}.$$

Si probamos que  $\#\mathcal{I}_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty$ , podremos terminar la demostración:

El hecho de que  $S_{\epsilon,\delta} \subset S^k$  y la condición impuesta sobre la medida de  $S_k$ , hacen que

$$\frac{1}{\mu(S^k)} \int_{S^k} f_{\epsilon,\delta} d\mu = \frac{\mu(S_{\epsilon,\delta})}{\mu(S_\delta^0)} = \frac{1}{r(\epsilon)}.$$

Entonces,

$$\bigcup_{k \in \mathcal{I}_\epsilon} S^k \subset \left\{ x / \tilde{\mathcal{M}}_\mu^p(f_{\epsilon,\delta})(x) > \frac{1}{2r(\epsilon)} \right\}.$$

Por la invarianza de  $\mu$ , podemos acotar inferiormente la medida del conjunto de nivel,

$$\begin{aligned} \mu \left( \left\{ x / \tilde{\mathcal{M}}_\mu^p(f_{\epsilon,\delta})(x) > \frac{1}{2r(\epsilon)} \right\} \right) &\geq \mu \left( \bigcup_{k \in \mathcal{I}_\epsilon} S^k \right) \\ &\geq \sum_{k \in \mathcal{I}_\epsilon} \mu \left( S^k \setminus \bigcup_{l < k} S^l \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{I}_\epsilon} \mu(S^k) \\ &= \frac{1}{2} (\#\mathcal{I}_\epsilon) r(\epsilon) \mu(S_{\epsilon,\delta}). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{\frac{1}{2r(\epsilon)}} \int f_{\epsilon,\delta} d\mu = 2r(\epsilon) \mu(S_{\epsilon,\delta}),$$

con lo que, si  $\#\mathcal{I}_\epsilon$  no está uniformemente acotado en  $\epsilon$ , quedará probado que  $\tilde{\mathcal{M}}_\mu^p$  no es de tipo débil (1,1).

Necesitamos una buena cota inferior para la cantidad de intervalos  $S^k$ ,  $k \leq N(\epsilon)$  que cumplen  $10\alpha_k \leq 2^k \delta \leq \alpha_k^p$ .  $\{\alpha_k\}$  es una sucesión decreciente, mientras que  $\{2^k \delta\}$

crece. Además,  $\alpha_k \geq \epsilon$  si  $k \leq N(\epsilon)$ . Basta exigir que  $2^{N(\epsilon)}\delta \leq \epsilon^p$  para que  $2^k\delta \leq \alpha_k^p$  para todo  $k \leq N(\epsilon)$ . Por esto elegimos

$$\delta = \frac{\epsilon^p}{r(\epsilon)^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Recordemos que  $r(\epsilon)$  no depende de  $\delta$ , por lo que la elección anterior es legítima.

La desigualdad  $10\alpha_k \leq 2^k\delta$  no es cierta para todo  $k \leq N(\epsilon)$ . En esta parte volvemos a utilizar la hipótesis de que  $\mathcal{M}_\mu$  es acotado. De la condición  $(\tilde{d})$  (que se encuentra en la demostración de (1)) se deduce

$$(*) \quad \mu(\{2 - 2^k\kappa < |x| \leq 2\}) \geq C(1 + \hat{C})^k \mu(\{2 - \kappa < |x| \leq 2\}), \quad \text{si } 2^k\kappa \leq \gamma$$

donde  $C, \hat{C} > 0$  quedan determinadas por  $\tilde{C}_3$ . Es fácil convencerse de esto: notemos que  $(\tilde{d})$  prueba que

$$\mu(\{|x| = b\}) = 0 \quad \text{si } 1 \leq b \leq 2.$$

Además, cuando elegimos  $a + 2r = 2$ ,  $2r = \eta \leq 2\gamma$ , también implica que

$$\begin{aligned} \mu(\{2 - \eta/4 < |x| \leq 2\}) &= \mu(\{2 - \eta/4 < |x| < 2\}) \\ &\leq \mu(\{2 - \eta < |x| < 2\}) \\ &\leq \tilde{C}_3 \mu(\{2 - 3\eta/4 < |x| < 2 - \eta/4\}) \\ &\leq \tilde{C}_3 \mu(\{2 - \eta < |x| < 2 - \eta/4\}). \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \mu(\{2 - \eta < |x| \leq 2\}) &= \mu(\{2 - \eta < |x| < 2 - \eta/4\}) + \mu(\{2 - \eta/4 < |x| \leq 2\}) \\ &\geq \left(\frac{1}{\tilde{C}_3} + 1\right) \mu(\{2 - \eta/4 < |x| \leq 2\}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $k$  es par, aplicando esta desigualdad  $k/2$  veces obtenemos

$$\begin{aligned} \mu(\{2 - 2^k\kappa < |x| \leq 2\}) &\geq \left(\frac{1}{\tilde{C}_3} + 1\right)^{k/2} \mu(\{2 - \kappa < |x| \leq 2\}) \\ &= (1 + \hat{C})^k \mu(\{2 - \kappa < |x| \leq 2\}). \end{aligned}$$

Con esto hemos probado  $(*)$  cuando  $k$  es par; el caso  $k$  impar se deduce de éste.

Ahora usamos  $(*)$  para encontrar una cota superior para  $\alpha_k$ . Por  $(*)$  y la invarianza por rotaciones,

$$\mu(\{2 - 2^l\epsilon < |x| \leq 2 / \text{áng}(x, x^0) < 2^k\delta\}) \geq C(1 + \hat{C})^l 2^{k(n-1)} \mu(S_{\epsilon, \delta}).$$

Entonces, por su definición,  $\alpha_k \leq 2^l \epsilon$  si  $C(1 + \hat{C})^l 2^{k(n-1)} \geq r(\epsilon)$ , o sea,

$$\alpha_k \leq C 2^{\log_1 + C \left\{ \frac{r(\epsilon)}{C 2^{k(n-1)}} \right\}} \epsilon = C \left( \frac{r(\epsilon)}{2^{k(n-1)}} \right)^m \epsilon, \quad \text{para cierto } m > 0.$$

Para encontrar una condición que asegure que  $10\alpha_k \leq 2^k \delta$ , estudiamos la desigualdad

$$C \left( \frac{r(\epsilon)}{2^{k(n-1)}} \right)^m \epsilon \leq 2^k \frac{\epsilon^p}{r(\epsilon)^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Podemos despejar  $k$ :

$$k \geq \frac{1}{n-1} \log_2 r(\epsilon) + \frac{1-p}{[m(n-1)+1]} \log_2 \epsilon + C.$$

En suma,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\epsilon &= \left\{ k \geq 0 / \frac{1}{n-1} \log_2 r(\epsilon) + C_{m,n,p} \log_2 \epsilon + C \leq k \leq \frac{1}{n-1} \log_2 r(\epsilon) \right\} \\ &= \left\{ \max \left( 0, \frac{1}{n-1} \log_2 r(\epsilon) - C_{m,n,p} \log_2 \frac{1}{\epsilon} + C \right) \leq k \leq \frac{1}{n-1} \log_2 r(\epsilon) \right\}, \end{aligned}$$

y concluimos

$$\#\mathcal{I}_\epsilon = \min \left\{ \frac{1}{n-1} \log_2 r(\epsilon), C_{m,n,p} \log_2 \frac{1}{\epsilon} - C \right\} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty.$$

- (b)  $\mu$  ES Estrictamente Positiva en  $\{\tau \leq |x| \leq \tau + \gamma\}$   
 $\vee \mu(\{\tau - \rho < |x| < \tau\}) = 0.$

Supondremos aquí que  $\tau = 1$ . Definimos

$$\mathcal{S}_x^p = \left\{ \begin{array}{l} S \text{ sectores : } x \in S, S = \{y : 1 \leq |y| < 1 + \alpha, \text{ áng}(y, y^0) < \beta\} \\ \text{para cualesquiera } \alpha, \beta > 0, \\ \text{con } \alpha \leq \min \left( \frac{\gamma}{3}, \frac{1}{100}, \left( \frac{\rho}{200} \right)^{\frac{1}{2p-1}} \right), 10\alpha \leq \beta \leq \frac{\alpha^p}{2} \end{array} \right\}.$$

con  $1/2 < p < 1$ , y

$$\tilde{\mathcal{M}}_\mu^p f(x) = \begin{cases} \sup_{S \in \mathcal{S}_x^p} \frac{1}{\mu(S)} \int_S |f| d\mu & \text{si } 1 \leq |x| < 1 + \min \left( \frac{\gamma}{3}, \frac{1}{100}, \left( \frac{\rho}{200} \right)^{\frac{1}{2p-1}} \right), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Probaremos ahora (1) y (2) en este segundo caso:



DEMOSTRACIÓN DE 1:

Fijemos un sector

$$S = \{y : 1 \leq |y| < 1 + \alpha, \text{áng}(y, y^0) < \beta\},$$

con  $y^0 = (y_1^0, 0, \dots, 0)$ . Para construir  $B_S$  (y probar que  $\tilde{\mathcal{M}}_\mu^p f \leq C_\mu \mathcal{M}_\mu f$ ), definimos

$$\mathcal{V} = \{x : |x| = 1 + \alpha, \text{áng}(x, y^0) = \beta\}, \quad x^0 = (1 + 3\alpha, 0, \dots, 0).$$

y  $B_S$  queda determinado por las condiciones

$$\mathcal{V} \subset \partial B_S, \quad x^0 \in \partial B_S.$$

En este caso se verifica ( $\tilde{d}$ ) si  $1 \leq a + r \leq 1 + \gamma$ ,  $r \leq 10a$ . Queremos comprobar que  $\mathcal{D} \cap B_S \subset \{y : 1 \leq |y| < 1 + 3\alpha, \text{áng}(y, y^0) < 6\beta\}$ . Probaremos que  $r \leq \rho/2$ , para asegurarnos de que  $\mathcal{D} \cap B_S \subset \{y : 1 \leq |y| < 1 + 3\alpha\}$  y luego que  $\mathcal{D} \cap B_S \subset \{y : \text{áng}(y, y^0) < 6\beta\}$ . Hagamos algunas observaciones que nos conducirán al resultado que buscamos. Sean  $u = (u_1, 0, \dots, 0)$  y  $r$  el centro y el radio de  $B_S$ . Denotemos por  $z$  y  $w$  un punto genérico de  $\mathcal{V}$  y otro de  $\partial B_S \cap \{|x| = 1\}$ . Notemos que  $r \geq |\bar{z}| = (1 + \alpha)\sin\beta \geq \beta/2 \geq 5\alpha$ , lo cual implica que  $u_1 = x_1^0 - r \leq 1 - 2\alpha$ .

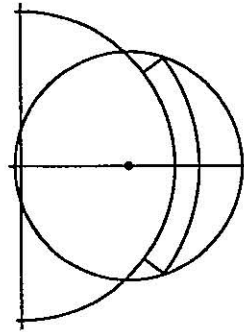


Figura 7

Es fácil (y útil) ver que  $z_1 \geq 1 : 1 + \alpha - z_1 = (1 + \alpha)(1 - \cos\beta) \leq 2\beta^2 \leq \alpha/2$ . De esto deducimos algo sobre el radio de  $B_S$ :

$$\begin{aligned} r^2 &= |z - u|^2 = (u_1 - z_1)^2 + |\bar{z}|^2 = (x_1^0 - r - z_1)^2 + |\bar{z}|^2 \\ &= (C_z \alpha - r)^2 + (1 + \alpha)^2 \sin^2 \beta \\ &= r^2 - 2C_z \alpha r + C_z^2 \alpha^2 + (1 + \alpha)^2 \sin^2 \beta \end{aligned}$$

con  $C_z \sim 1$ , y por consiguiente,  $r \leq 100\beta^2/\alpha \leq \frac{100\alpha^{2p-1}}{4} \leq \frac{\rho}{2}$ .

Si comprobamos que  $w_1 \geq 1 - \alpha$ , entonces, por la convexidad de  $B_S$ ,  $|\bar{w}| \leq \frac{|\bar{z}|}{|z_1 - x_1^0|} |w_1 - x_1^0| \leq \frac{2\text{sen}\beta}{2\alpha} 4\alpha = 4\text{sen}\beta$ , y por tanto,  $\text{áng}(w, y^0) < 6\beta$ . Además, si  $y \in \mathcal{D} \cap B_S$ , entonces,  $|\bar{y}| \leq |\bar{w}|$  y  $y_1 \geq w_1$ , de donde  $\text{áng}(y, y_0) \leq \text{áng}(w, y_0) < 6\beta$ . Con todo lo que sabemos es fácil probar que  $w_1 \geq 1 - \alpha$ :

$$\begin{aligned} 1 - (w_1)^2 &= |\bar{w}|^2 = r^2 - |u_1 - w_1|^2 = r^2 - (1 + 3\alpha - r - w_1)^2 \\ 1 - (w_1)^2 &= r^2 - [r^2 - 2(1 + 3\alpha - w_1)r + (1 + 3\alpha - w_1)^2] \\ 1 - (w_1)^2 &= (2r - 1 - 3\alpha + w_1)(1 + 3\alpha - w_1) \\ 1 - w_1 &\leq (2r - 1 - 3\alpha + w_1)(1 + 3\alpha - w_1) \end{aligned}$$

Si  $w_1$  fuera menor que  $1 - \alpha$ , entonces,  $1 - w_1 > \alpha$  y

$$1 - w_1 \leq (2r - 1 - 3\alpha + w_1)(1 + 3\alpha - w_1) \leq 2r(4(1 - w_1)),$$

y entonces  $1 \leq 8r \leq 100\alpha^{2p-1} \leq 100^{-2p}$ , que es una desigualdad falsa.

La prueba de (2) no necesita ninguna modificación significativa respecto a la dada en el primer caso. •

## CAPÍTULO 2

### ACOTACIONES DE TIPO DÉBIL (1,1) CON PESO PARA OPERADORES CON NÚCLEOS NO SUAVES

En este capítulo probaremos desigualdades con peso para algunos operadores que se caracterizan por su falta de regularidad. En todos los casos obtendremos el tipo débil (1,1) respecto a pares de pesos de la forma  $(\omega, \widetilde{M}\omega)$ , donde  $\widetilde{M}$  será un operador maximal o una composición de varios de ellos, modificados por potencias.

El nexa más fuerte entre los tres resultados y que nos induce a englobarlos en esta unidad, es su demostración. Por un lado utilizaremos estimaciones muy precisas que se probaron hace ya tiempo al resolver los mismos problemas respecto a la medida de Lebesgue. Por otro, acotaciones muy sencillas con pesos, que obtendremos tratando los operadores como si fueran positivos, es decir, sin que sea necesario estudiar su oscilación. Después mezclaremos todo usando algunos teoremas de interpolación con cambio de medida.

La idea esencial que hay detrás de las demostraciones es que, una vez obtenida la acotación de un operador respecto a la medida de Lebesgue, la tarea de añadir un par de pesos ha de ser mucho más fácil. Esta idea no es en modo alguno original. En [H3] se obtienen así (y de allí proviene la idea de interpolar con cambio de medida) acotaciones  $L^p$ , con peso, para  $p > 1$  y para un grupo amplio de operadores. En [S1], y, en un contexto mucho más general, en [So-We], la misma filosofía produce teoremas para pesos potencia.

## §1. OPERADOR MAXIMAL CON UN NÚCLEO SIN REGULARIDAD

Dada una función positiva e integrable sobre  $S^{n-1}$ ,  $\Omega$ , se define el operador maximal asociado

$$\mathcal{M}_\Omega f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{|y|<r} \Omega\left(\frac{y}{|y|}\right) |f(x-y)| dy$$

que actúa sobre funciones  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

En dimensión  $n = 1$ , este operador es esencialmente el maximal de Hardy-Littlewood, cuyas propiedades ya forman parte de la teoría clásica y fundamental del análisis armónico. Por esta razón a partir de este momento nos dedicaremos a dimensiones superiores a 1.

El ejemplo más sencillo,  $\Omega \equiv 1$ , nos da un múltiplo del operador maximal de Hardy-Littlewood.

El método de rotaciones muestra que  $\mathcal{M}_\Omega$  está acotado en  $L^p$  si  $1 < p < \infty$ . La acotación en  $L^\infty$  es obvia. La pregunta de si  $\mathcal{M}_\Omega$  es de tipo débil (1,1) tiene aún una respuesta incompleta. Existen algunos teoremas en los que, añadiendo una hipótesis sobre  $\Omega$ , se concluye la respuesta afirmativa. De ellos enunciamos aquí el más relacionado con la exposición que sigue, y que es, además, el causante de nuestro interés en este tema.

### Teorema 2.1

- a) (M. Christ [C]). En dimensión  $n = 2$ , si  $\Omega \in L^q(S^1)$ ,  $1 < q < \infty$ , entonces,  $\mathcal{M}_\Omega$  es de tipo débil (1,1).
- b) (M. Christ, J.L. Rubio de Francia [C-R]). Si  $n \geq 2$ , y  $\Omega \in L(\log^+ L)(S^{n-1})$ , entonces,  $\mathcal{M}_\Omega$  es de tipo débil (1,1).

El apartado b) es una generalización de a). Pero puesto que este último es anterior a aquél, tenemos que incluirlo en nuestra relación de teoremas.

En dimensión 2, con hipótesis sobre la monotonía de  $\Omega$ , S. M. Hudson [Hu] llegó a la misma conclusión.

En otra dirección, que es la de restringir el conjunto de funciones sobre las que actúa el operador, P. Sjögren y F. Soria [Sj-So] probaron que  $\mathcal{M}_\Omega$  es de tipo débil (1,1) sobre funciones radiales, siempre que  $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ .

El interés por la teoría de pesos para  $\mathcal{M}_\Omega$  ha crecido en los últimos años. Recordemos que el operador maximal de Hardy-Littlewood,  $\mathcal{M}$ , satisface acotaciones  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$  y de tipo débil (1,1) respecto al par de pesos  $(\omega, \mathcal{M}\omega)$ . Es razonable por tanto esperar que  $\mathcal{M}_\Omega$  verifique las mismas desigualdades con un par de pesos  $(\omega, \tilde{\mathcal{M}}\omega)$ , donde  $\tilde{\mathcal{M}}$  esté relacionado con  $\mathcal{M}_\Omega$ . Hay algunos resultados destacables orientados en este sentido.

## Teorema 2.2

a) (S. Hofmann [H3]). Si  $\Omega \in L^q(S^{n-1})$  para algún  $q > 1$ , entonces, para todo par  $p, \beta > 1$ , existe una constante  $C = C(p, \beta, \Omega)$  tal que

$$\int |\mathcal{M}_\Omega f(x)|^p \omega(x) dx \leq C \int |f(x)|^p \mathcal{M}^\beta \mathcal{M}_\Omega^\beta \mathcal{M}^\beta \omega(x) dx$$

para toda  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  y todo peso  $\omega$ , donde  $\mathcal{M}$  es el operador maximal de Hardy-Littlewood y

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\beta \omega(x) &= [\mathcal{M}(\omega^\beta)]^{1/\beta} \\ \tilde{\Omega}(\bar{x}) &= \Omega(-\bar{x}), \quad \mathcal{M}_\Omega^\beta \omega(x) = [\mathcal{M}_{\tilde{\Omega}}(\omega^\beta)]^{1/\beta}. \end{aligned}$$

Para los pesos de la forma  $\omega(x) = \nu^\gamma(x) = |x|^\gamma$ , es decir, los llamados pesos potencia, se conoce el comportamiento de  $\mathcal{M}_\Omega$  con tanta precisión como en el caso de la medida de Lebesgue (que corresponde a  $\gamma = 0$ ).

b) (S. Hofmann [H2]). Si  $n = 2$  y si

b1)  $\Omega \in L^q(S^1)$ ,  $1 < q < \infty$  y  $-2 + \frac{1}{q} < \gamma < 0$ ,

o si

b2)  $\Omega \in L(\log^+ L)(S^1)$  y  $-1 < \gamma < 0$ ,

se tiene

$$\nu^\gamma(\{x : \mathcal{M}_\Omega f(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int |f(y)| \nu^\gamma(y) dy.$$

c) (F. Soria, G. Weiss [So-We]). Si  $\mathcal{M}_\Omega$  es de tipo débil (1,1) respecto a la medida de Lebesgue,  $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ , y  $-(n - \frac{n-1}{q}) < \gamma < 0$ , se tiene

$$\nu^\gamma(\{x : \mathcal{M}_\Omega f(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int |f(y)| \nu^\gamma(y) dy.$$

El rango de  $\gamma$  que aparece en b) y c) es óptimo.

Véase también el reciente trabajo de J. Duoandikoetxea [D2], en el que se describen resultados semejantes a los enunciados en este teorema.

En todo lo que sigue, denotaremos por la misma letra  $C$  a todas las constantes que aparezcan en nuestros cálculos, y que podrán ser diferentes en cada punto. En general, indicaremos aquellos parámetros de los que dependan, excepto la dimensión  $n$ . (Por ejemplo, si escribimos  $C(\beta)$ , queremos decir que depende sólo de  $\beta$  y quizá de  $n$ .)

El resultado que presentamos se refiere al tipo débil (1,1) con pesos de  $\mathcal{M}_\Omega$ .

### Teorema 2.3

Para todo  $\beta > 1$ , existe una constante  $C(\beta) > 0$ , tal que, si  $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ ,  $\Omega \geq 0$  y  $\|\Omega\|_{L^1} \leq 1$ , entonces

$$\omega(\{x : \mathcal{M}_\Omega f(x) > \alpha\}) \leq \frac{C(\beta)}{\alpha} \int |f(y)| \left\{ \mathcal{M}^\beta \omega(y) + \mathcal{M}_{\tilde{\Omega}(\log^+ \tilde{\Omega})^\beta} \mathcal{M} \omega(y) \right\} dy,$$

para toda  $\omega \geq 0$  medible, y cualquier función  $f$  para la que el término de la derecha sea finito. La misma desigualdad es cierta, con la correspondiente hipótesis sobre  $f$ , si se pone  $\mathcal{M} \mathcal{M}_{\tilde{\Omega}(\log^+ \tilde{\Omega})^\beta} \omega$  en lugar de  $\mathcal{M}_{\tilde{\Omega}(\log^+ \tilde{\Omega})^\beta} \mathcal{M} \omega$ .

Observemos que  $x(\log^+ x) \leq \frac{e^{-1}}{p-1} x^p$  si  $p > 1$ . Por otro lado, si  $\Omega \in L^q(S^{n-1})$  con  $q > 1$ , entonces la desigualdad de Hölder nos dice que

$$\mathcal{M}_{\tilde{\Omega}^p} v(x) \leq \|\Omega\|_{L^q}^{q/\beta'} \mathcal{M}_{\tilde{\Omega}}^\beta v(x)$$

para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , eligiendo  $p = \frac{q}{\beta'} + \frac{1}{\beta} > 1$ .

Después de estas observaciones podemos escribir una versión del teorema 2.3, algo más débil, pero con un enunciado más agradable.

### Teorema 2.4

Para todo  $\beta > 1$ , existe una constante  $C(\beta) > 0$ , tal que, si  $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ , con  $1 < q < \infty$  y  $\Omega \geq 0$ , entonces

$$\omega(\{x : \mathcal{M}_\Omega f(x) > \alpha\}) \leq \frac{C(\beta)}{(q-1)^\beta} \frac{1}{\alpha} \int |f| \left\{ \|\Omega\|_{L^q} \mathcal{M}^\beta \omega + \|\Omega\|_{L^q}^{1/\beta'} \mathcal{M}_{\tilde{\Omega}}^\beta \mathcal{M} \omega \right\},$$

para  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  y cualquier  $\omega \geq 0$ .

Además, si  $\Omega \in L^q$  con  $q > 1$ , el teorema 2.1 implica un teorema de diferenciación y por lo tanto que para cualquier peso  $v$ ,  $\mathcal{M}_\Omega v(x) \geq \|\Omega\|_{L^1} v(x)$  en casi todo punto.

**Teorema 2.5**

Si  $\Omega \in L^q(S^{n-1})$  con  $q > 1$ , entonces, para todo  $\beta > 1$ ,

$$\omega(\{x : \mathcal{M}_\Omega f(x) > \alpha\}) \leq \frac{C(\beta, \Omega)}{\alpha} \int |f(y)| \mathcal{M}_\Omega^\beta \mathcal{M}^\beta \omega(y) dy.$$

Interpolando con la estimación obvia en  $L^\infty$ , podemos mejorar ligeramente el teorema 2.2.a).

**Corolario 2.6**

Si  $\Omega \in L^q(S^{n-1})$  con  $q > 1$ , entonces

$$\int |\mathcal{M}_\Omega f(x)|^p \omega(x) dx \leq C(\Omega, \beta) \int |f(x)|^p \mathcal{M}_\Omega^\beta \mathcal{M}^\beta \omega(x) dx$$

para todo  $p, \beta > 1$ .

En el caso particular de que  $\omega$  sea un peso potencia,  $\omega(x) = \nu^\gamma(x) = |x|^\gamma$  y  $\Omega \in L(\log^+ L)^\beta$ , con  $\beta > 1$ , el teorema 2.3 engloba los resultados del teorema 2.2 b) y c). Esto es consecuencia de que  $\nu^\gamma$  es un peso  $A_1$ , y por tanto  $\mathcal{M}\nu^\gamma \leq C_\gamma \nu^\gamma$ , si  $-n < \gamma \leq 0$ , y de una sencilla

**Observación 2.7**

Si  $\Lambda \in L^q(S^{n-1})$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  y  $-(n - \frac{n-1}{q}) < \gamma < 0$ , entonces

$$\mathcal{M}_\Lambda \nu^\gamma(x) \leq C_{\gamma, q} \|\Lambda\|_{L^q} \nu^\gamma(x),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**DEMOSTRACIÓN:**

Por homogeneidad podemos limitarnos al caso  $|x| = 1$ . Dado  $r > \frac{1}{2}$  (el caso  $r \leq 1/2$  es trivial),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^n} \int_{|y| < r} \Lambda\left(\frac{y}{|y|}\right) \nu^\gamma(x - y) dy \\ &= \frac{1}{r^n} \int_0^r \int_{S^{n-1}} \Lambda(\bar{y}) |x - \rho \bar{y}|^\gamma d\sigma(\bar{y}) \rho^{n-1} d\rho \\ &\leq \|\Lambda\|_{L^q} \frac{1}{r^n} \int_0^r \| |x - \rho \cdot|^\gamma \|_{L^{q'}(S^{n-1})} \rho^{n-1} d\rho. \end{aligned}$$

Si  $q = 1$ , entonces  $q' = \infty$  y podemos acotar el último término por

$$\|\Lambda\|_{L^1} \frac{1}{r^n} \int_0^r |1 - \rho|^\gamma \rho^{n-1} d\rho \leq C_\gamma \|\Lambda\|_{L^1},$$

si y sólo si  $-1 < \gamma < 0$ .

Si  $0 > \gamma q' > -n$ , se mayor por

$$\|\Lambda\|_{L^q} \left[ \mathcal{M}(\nu^{\gamma q'})(x) \right]^{\frac{1}{q'}} \leq \|\Lambda\|_{L^q} \nu^\gamma(x)$$

ya que  $\nu^{\gamma q'} \in A_1$ .

Si  $\gamma q' \leq -n$ , debemos estimar con más cuidado la integral interior. Si  $\rho \neq 1$  y  $0 < \rho < 2$ , entonces

$$\begin{aligned} & \int_{S^{n-1}} |x - \rho \bar{y}|^{\gamma q'} d\sigma(\bar{y}) \\ & \leq C \sum_{k=1}^{\lfloor \log \frac{2}{1-\rho} \rfloor} (2^k |1 - \rho|)^{\gamma q'} \sigma(\{\bar{y} \in S^{n-1} : 2^{k-1} |1 - \rho| \leq |x - \rho \bar{y}| < 2^k |1 - \rho|\}) \\ & \leq C \sum_{k=0}^{\lfloor \log \frac{2}{1-\rho} \rfloor} (2^k |1 - \rho|)^{\gamma q'} \left( \frac{2^k |1 - \rho|}{\rho} \right)^{n-1} \\ & \leq C |1 - \rho|^{\gamma q' + n - 1} \rho^{1-n}, \end{aligned}$$

ya que  $\gamma q' + n - 1 < 0$ .

En consecuencia

$$\frac{1}{r^n} \int_0^2 \left[ \int_{S^{n-1}} |x - \rho \bar{y}|^{\gamma q'} d\sigma(\bar{y}) \right]^{\frac{1}{q'}} \rho^{n-1} d\rho \leq C \frac{1}{r^n} \int_0^2 |1 - \rho|^{\gamma + \frac{n-1}{q'}} \rho^{\frac{n-1}{q}} d\rho,$$

y esta última expresión es finita si y sólo si  $\gamma + \frac{n-1}{q'} > -1$ , es decir,  $\gamma > \frac{n-1}{q} - n$ .

El resto de la integral es más fácil de tratar. Si  $r > 2$ ,

$$\frac{1}{r^n} \int_2^r \left[ \int_{S^{n-1}} |x - \rho \bar{y}|^{\gamma q'} d\sigma(\bar{y}) \right]^{\frac{1}{q'}} \rho^{n-1} d\rho \leq \frac{1}{r^n} \int_2^r \rho^{\gamma + n - 1} d\rho \leq C_\gamma$$

ya que  $\gamma < 0$ .



Pasemos por fin a la

#### DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.3:

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $f$  es una función positiva y  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Siguiendo [C], tomamos una función  $\phi \in C_0^\infty([1/4, 1])$ ,  $0 \leq \phi \leq 1$  y tal que  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi(2^{-j}r) = 1$  si  $r > 0$ . Definimos

$$K_j(x) = 2^{-nj} \phi(2^{-j}|x|) \Omega\left(\frac{y}{|y|}\right).$$

Notemos que

$$\mathcal{M}_\Omega f(x) \leq C \sup_{j \in \mathbb{Z}} K_j * f(x),$$

y que, por tanto, es suficiente probar que

$$\omega(\{x : \sup_{j \in \mathbb{Z}} K_j * f(x) > \alpha\}) \leq \frac{C(\beta)}{\alpha} \int |f(y)| \left\{ \mathcal{M}^\beta \omega(y) + \mathcal{M}_{\tilde{\Omega}(\log + \tilde{\Omega})^\beta} \omega(y) \right\} dy.$$

Dado  $\alpha > 0$ , hacemos la descomposición de Calderón-Zygmund de  $f$  a altura  $2^{-n-1}c_n\alpha$ , donde  $c_n = \|\phi\|_{L^1(u^{n-1} du)}^{-1}$ . Encontramos una familia de cubos diádicos disjuntos,  $\mathcal{Q}$ , de modo que se verifica

$$\begin{aligned} 2^{-n-1}c_n\alpha &< \frac{1}{|Q|} \int_Q f \leq 2^{-1}c_n\alpha \quad \text{si } Q \in \mathcal{Q} \\ f(x) &\leq 2^{-n-1}c_n\alpha \quad \text{en } \left(\bigcup_Q Q\right)^c \end{aligned}$$

Dividimos  $f$  en dos partes, la parte buena,  $g$  (good en inglés), y la parte mala,  $b$  (bad).

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{|Q|} \int_Q f & \text{si } x \in Q \in \mathcal{Q} \\ f(x) & \text{si } x \in \left(\bigcup_Q Q\right)^c \end{cases}$$

$$b(x) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} b_Q(x) \quad \text{donde} \quad b_Q(x) = \left[ f(x) - \frac{1}{|Q|} \int_Q f \right] \chi_Q(x).$$

De este modo,

$$f(x) = g(x) + b(x).$$

Basta por tanto estimar la  $\omega$ -medida de los conjuntos de nivel asociados a  $g$  y  $b$ .

*Sobre la parte buena*

Cada uno de los  $K_j$  pertenece a  $L^1$ , y  $\|K_j\|_{L^1} \leq c_n^{-1} \|\Omega\|_{L^1} \leq c_n^{-1}$ . Por construcción  $\|g\|_{L^\infty} \leq 2^{-1} c_n \alpha$  y, en consecuencia,

$$\|K_j * g\|_{L^\infty} \leq \|K_j\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty} \leq \alpha/2.$$

Por lo tanto,

$$\{x : \sup_z K_j * g(x) > \alpha/2\} = \emptyset.$$

*Sobre la parte mala*

Dividimos el conjunto de nivel  $\{x : \sup_z |K_j * b(x)| > \alpha/2\}$  en dos partes, la que está 'cerca' del soporte de  $b$  y la que está 'lejos' de él.

Para la parte 'cercana', hacemos el cálculo habitual. Llamamos  $3Q$  al cubo con el mismo centro que  $Q$  y lado 3 veces mayor, y se obtiene

$$\begin{aligned} \omega\left(\bigcup_Q 3Q\right) &\leq \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \omega(3Q) = \sum_Q \frac{\omega(3Q)}{|3Q|} 3^n |Q| \leq 3^n \sum_Q \frac{\omega(3Q)}{|3Q|} \frac{2^{n+1}}{c_n \alpha} \int_Q f \\ &\leq \frac{C_n}{\alpha} \sum_Q \int_Q f \inf_Q \mathcal{M}\omega \leq \frac{C_n}{\alpha} \int f \mathcal{M}\omega. \end{aligned}$$

Notemos que en este cálculo no ha intervenido el operador  $\mathcal{M}_\Omega$  y sólo es consecuencia de la descomposición de Calderón-Zygmund.

Para estudiar la parte lejana, denotemos por  $l(Q)$  la longitud de la arista de  $Q$  y definamos

$$\mathcal{Q}_m = \{Q \in \mathcal{Q} : l(Q) = 2^m\}, \quad B_m = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_m} b_Q.$$

Si  $x \notin \bigcup_Q 3Q$ , entonces

$$K_j * b(x) = K_j * \sum_{m < j} B_m(x),$$

ya que si  $m \geq j$  y  $l(Q) = 2^m$ , se tiene  $\text{sop } K_j * b_Q \subset 3Q$ .

También dividimos  $\Omega$  en trozos de acuerdo con sus valores diádicos,

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \Omega \chi_{\{\bar{u} \in S^{n-1} : \Omega(\bar{u}) \leq 2\}} \\ \Omega_i &= \Omega \chi_{\{\bar{u} \in S^{n-1} : 2^i < \Omega(\bar{u}) \leq 2^{i+1}\}} \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Sean  $K_j^i(x) = 2^{-nj} \phi(2^{-j}|x|) \Omega_i \left( \frac{y}{|y|} \right)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \sup_j |K_j * b(x)| &= \sup_j \left| \sum_i K_j^i * \sum_{m < j} B_m(x) \right| \\ &= \sup_j \left| \sum_i K_j^i * \sum_{s=1}^{\infty} B_{j-s}(x) \right| \\ &\leq \sum_i \sum_{s=1}^{\infty} \sup_j |K_j^i * B_{j-s}(x)|. \end{aligned}$$

La clave de la demostración son dos acotaciones con peso válidas para los núcleos  $K_j^i$  que enunciamos a continuación:

**Lema 2.8**

Sea  $\Lambda$  una función definida sobre  $S^{n-1}$ , positiva e integrable.

Sean  $K_j(x) = 2^{-nj} \phi(2^{-j}|x|) \Lambda \left( \frac{y}{|y|} \right)$ . Entonces, para todo  $\beta > 1$ , existe  $\epsilon(\beta) > 0$  tal que

$$(A.\omega) \quad \|K_j * B_{j-s}\|_{L^1(\omega)} \leq \|B_{j-s}\|_{L^1(\tilde{K}_j * \omega)}$$

$$(B.\omega) \quad \|K_j * B_{j-s}\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C 2^{-\epsilon(\beta)s} \alpha \|B_{j-s}\|_{L^1(\mathcal{M}^s \omega)} \|\Lambda\|_{\infty}^2,$$

$$\text{donde } \tilde{K}_j = 2^{-nj} \phi(2^{-j}|x|) \tilde{\Lambda} \left( \frac{y}{|y|} \right).$$

Asumiendo este lema podemos terminar la prueba del teorema. Para ello, fijamos  $N > 0$  que elegiremos más adelante en función únicamente del valor de  $\beta$ . Escribimos

$$\begin{aligned} &\sum_i \sum_{s=1}^{\infty} \sup_j |K_j^i * B_{j-s}(x)| \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{Ni} \sup_j |K_j^i * B_{j-s}(x)| + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=Ni+1}^{\infty} \sup_j |K_j^i * B_{j-s}(x)| \\ &= I + II. \end{aligned}$$

A cada una de las dos partes en que hemos dividido el operador le aplicaremos una de las desigualdades con peso del lema 2.8.

Usando (A. $\omega$ ) y la desigualdad de Chebichev, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \omega(\{x : I > \alpha/4\}) &\leq \frac{4}{\alpha} \|I\|_{L^1(\omega)} \\
 &\leq \frac{4}{\alpha} \sum_i \sum_{s=1}^{Ni} \left\| \sup_j |K_j^i * B_{j-s}| \right\|_{L^1(\omega)} \\
 &\leq \frac{4}{\alpha} \sum_i \sum_{s=1}^{Ni} \sum_j \|K_j^i * B_{j-s}\|_{L^1(\omega)} \\
 &\leq \frac{4}{\alpha} \sum_i \sum_{s=1}^{Ni} \sum_j \|B_{j-s}\|_{L^1(\tilde{K}_j^i * \omega)} \\
 &\leq \frac{4}{\alpha} \sum_i \sum_{s=1}^{Ni} \sum_j \sum_{Q \in Q_{j-s}} \|b_Q\|_{L^1(\tilde{K}_j^i * \omega)}.
 \end{aligned}$$

Para seguir adelante, notemos que

$$\|b_Q\|_{L^1(\tilde{K}_j^i * \omega)} \leq 2 \int_Q |f(x)| \tilde{K}_j^i * \mathcal{M}\omega(x) dx.$$

Por tanto, cambiando el orden de sumación

$$\begin{aligned}
 \omega(\{x : I > \alpha/4\}) &\leq \frac{8}{\alpha} \sum_l \sum_{Q \in Q_l} \sum_i \sum_{j=l+1}^{l+Ni} \int_Q |f(x)| \tilde{K}_j^i * \mathcal{M}\omega(x) dx \\
 &\leq \frac{8}{\alpha} \sum_l \sum_{Q \in Q_l} \int_Q |f(x)| \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=l+1}^{l+Ni} \tilde{K}_j^i * \mathcal{M}\omega(x) \right\} dx.
 \end{aligned}$$

Para concluir la parte relativa a  $I$  probaremos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=l+1}^{l+Ni} \tilde{K}_j^i * \mathcal{M}\omega(x) \leq C_{\beta} \mathcal{M}_{\tilde{\Omega}(\log + \tilde{\Omega})^{\beta}} \mathcal{M}\omega(x),$$

para todo  $\beta > 1$ , con una constante independiente de  $l$ . Para ello ponemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=l+1}^{l+N i} \tilde{K}_j^i * \mathcal{M}\omega(x) \\
& \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=l+1}^{l+N i} 2^{-j n} \int_{\{2^{j-2} \leq |y| \leq 2^j\}} \tilde{\Omega}_i\left(\frac{y}{|y|}\right) \mathcal{M}\omega(x-y) dy \\
& = \sum_{j=l+1}^{l+N} 2^{-j n} \int_{\{2^{j-2} \leq |y| \leq 2^j\}} \tilde{\Omega}\left(\frac{y}{|y|}\right) \chi_{\{\Omega > 2\}} \mathcal{M}\omega(x-y) dy \\
& \quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=l+N m+1}^{l+N(m+1)} 2^{-j n} \int_{\{2^{j-2} \leq |y| \leq 2^j\}} \tilde{\Omega}\left(\frac{y}{|y|}\right) \chi_{\{\Omega > 2^{m+1}\}} \mathcal{M}\omega(x-y) dy \\
& \leq N \mathcal{M}_{\tilde{\Omega}} \mathcal{M}\omega(x) \\
& \quad + C_{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=l+N m+1}^{l+N(m+1)} 2^{-j n} \int_{\{2^{j-2} \leq |y| \leq 2^j\}} \tilde{\Omega}\left(\frac{y}{|y|}\right) \frac{\left(\log^+ \tilde{\Omega}\left(\frac{y}{|y|}\right)\right)^{\beta}}{(m+1)^{\beta}} \mathcal{M}\omega(x-y) dy \\
& \leq N \mathcal{M}_{\tilde{\Omega}} \mathcal{M}\omega(x) + C_{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^{-\beta} N \mathcal{M}_{\tilde{\Omega}(\log^+ \tilde{\Omega})^{\beta}} \mathcal{M}\omega(x) \\
& \leq C_{\beta} N \mathcal{M}_{\tilde{\Omega}(\log^+ \tilde{\Omega})^{\beta}} \mathcal{M}\omega(x),
\end{aligned}$$

tal y como queríamos. Obsérvese que podemos sustituir el operador  $\mathcal{M}_{\tilde{\Omega}(\log^+ \tilde{\Omega})^{\beta}}$  por  $\mathcal{M}_{\tilde{\Omega}\psi(\log^+ \tilde{\Omega})}$  con cualquier función positiva  $\psi$  que verifique  $\sum \frac{1}{\psi(m)} < \infty$ , como, por ejemplo,  $\psi(t) = t(\log t)^2$ .

Estimemos ahora la medida del conjunto de nivel asociado a  $II$  usando  $(B.\omega)$ .

$$\begin{aligned}
& \omega\left(\left\{x : \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=N i+1}^{\infty} \sup_j |K_j^i * \mathcal{B}_{j-s}(x)| > \alpha/4\right\}\right) \\
& \leq \frac{16}{\alpha^2} \left(\sum_i \sum_{s=N i+1}^{\infty} \left\|\sup_j |K_j^i * \mathcal{B}_{j-s}(x)|\right\|_{L^2(\omega)}\right)^2 \\
& \leq \frac{16}{\alpha^2} \left(\sum_i \sum_{s=N i+1}^{\infty} \left\|\left(\sum_j |K_j^i * \mathcal{B}_{j-s}|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^2(\omega)}\right)^2 \\
& = \frac{16}{\alpha^2} \left(\sum_i \sum_{s=N i+1}^{\infty} \left(\sum_j \|K_j^i * \mathcal{B}_{j-s}\|_{L^2(\omega)}^2\right)^{1/2}\right)^2 \\
& \leq \frac{16}{\alpha^2} \left(\sum_i \sum_{s=N i+1}^{\infty} 2^{-\epsilon(\beta)s/2} \alpha^{1/2} \left(\sum \| \mathcal{B}_{j-s} \|_{L^1(\mathcal{M}^{\beta}\omega)}\right)^{1/2} \|\Omega_i\|_{L^{\infty}}\right)^2.
\end{aligned}$$

Como  $\mathcal{M}^\beta \omega$  es un peso de la clase  $A_1$ , entonces,  $\mathcal{M}\mathcal{M}^\beta \omega \leq C_\beta \mathcal{M}^\beta \omega$  y por consiguiente la última expresión se acota por

$$\begin{aligned} & \frac{16}{\alpha^2} \left( \sum_i \sum_{s=Ni+1}^{\infty} 2^{-\epsilon(\beta)s/2} \alpha^{1/2} \|f\|_{L^1(\mathcal{M}^\beta \omega)}^{1/2} \|\Omega_i\|_{L^\infty} \right)^2 \\ & \leq \frac{C_\beta}{\alpha} \left( \sum_{i=0}^{\infty} 2^i 2^{-\epsilon(\beta)Ni/2} \|f\|_{L^1(\mathcal{M}^\beta \omega)}^{1/2} \right)^2 \\ & \leq \frac{C_\beta}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathcal{M}^\beta \omega)}, \end{aligned}$$

si elegimos  $N = \frac{4}{\epsilon(\beta)}$ .

Sumando ambas acotaciones obtenemos la conclusión del teorema 2.3.

Para acabar la prueba del teorema sólo falta la

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2.8:

A) *Estimación  $L^1$  con peso*

Consiste simplemente en tomar valores absolutos y cambiar el orden de integración

$$\|K_j * \mathcal{B}_{j-s}\|_{L^1(\omega)} \leq \int K_j * |\mathcal{B}_{j-s}|(x) \omega(x) dx = \int |\mathcal{B}_{j-s}(x)| \tilde{K}_j * \omega(x) dx$$

B) *Estimación  $L^2$  con peso*

La estimación  $(B.\omega)$ , en el caso particular de  $\omega \equiv 1$ , fue probado primero por M. Christ [C] en dimensión 2 y posteriormente M. Christ y J. L. Rubio de Francia [C-R] la generalizaron a cualquier dimensión. M. Christ observó que en dimensión 2, a pesar de que  $K_j$  no tiene ninguna regularidad,  $K_j * \tilde{K}_j$  se puede escribir como suma de una función pequeña y otra diferenciable. Esto, junto con la propiedad de cancelación de  $b$ , es decir,  $\int b_Q = 0$  y su tamaño en norma  $L^1$  ( $\int |b_Q| \leq c_n \alpha |Q|$ ), produce el resultado. En dimensiones superiores la prueba es considerablemente más difícil. Así pues, es un hecho bien conocido que

$$(B.1) \quad \|K_j * \mathcal{B}_{j-s}\|_{L^2}^2 \leq C 2^{-\epsilon s} \alpha \|\mathcal{B}_{j-s}\|_{L^1} \|\Lambda\|_\infty^2.$$

Para probar la desigualdad con peso, primero haremos una acotación trivial y después interpolaremos con (B.1) para obtener el factor  $2^{-\epsilon(\beta)s}$ . Para ello, escribimos

$$\begin{aligned}
& \int |K_j * \mathcal{B}_{j-s}(x)|^2 \omega(x) dx \\
&= \int K_j * \mathcal{B}_{j-s}(x) K_j * \mathcal{B}_{j-s}(x) \omega(x) dx \\
&= \iint \mathcal{B}_{j-s}(y) \mathcal{B}_{j-s}(z) \int K_j(x-y) K_j(x-z) \omega(x) dx dz dy \\
&\leq \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \iint |\mathcal{B}_{j-s}(y)| |\mathcal{B}_{j-s}(z)| \int_{|x-y| \leq 2^j} 2^{-2nj} \omega(x) dx dz dy.
\end{aligned}$$

Supongamos por un momento que  $\text{sop } \mathcal{B}_{j-s} \subset \mathcal{U}_j = \{x : |x_i| \leq 2^j, i = 1, 2, \dots, n\}$ . Dicho de otro modo, puesto que la convolución con  $K_j$  es un operador local (porque  $\text{sop } K_j \subset \mathcal{U}_j$ ), podemos descomponer  $\mathcal{B}_{j-s}$  en trozos con soporte en cubos de lado  $2^j$  y sumar al final las acotaciones que obtengamos para cada uno de ellos.

Con esta suposición se tiene

$$\|\mathcal{B}_{j-s}\|_{L^1} \leq \sum_{\substack{Q \subset \mathcal{U}_j \\ Q \in \mathcal{Q}_{j-s}}} \int |b_Q| \leq c_n \sum_{\substack{Q \subset \mathcal{U}_j \\ Q \in \mathcal{Q}_{j-s}}} \alpha |Q| \leq c_n \alpha 2^{nj},$$

y, volviendo a nuestra estimación con peso,

$$\begin{aligned}
\int |K_j * \mathcal{B}_{j-s}(x)|^2 \omega(x) dx &\leq C \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \|\mathcal{B}_{j-s}\|_{L^1} \alpha 2^{-nj} \int_{2\mathcal{U}_j} \omega(x) dx \\
&= C \alpha \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \|\mathcal{B}_{j-s}\|_{L^1} \frac{1}{|2\mathcal{U}_j|} \int_{2\mathcal{U}_j} \omega(x) dx.
\end{aligned}$$

Para terminar, vamos a ‘interpolarmos’ esta última estimación con la enunciada en (B.1) usando la desigualdad de Hölder. Dado cualquier  $\beta > 1$

$$\begin{aligned}
& \int |K_j * \mathcal{B}_{j-s}(x)|^2 \omega(x) dx \\
&\leq \left( \int |K_j * \mathcal{B}_{j-s}(x)|^2 \omega^\beta(x) dx \right)^{1/\beta} \left( \int |K_j * \mathcal{B}_{j-s}(x)|^2 dx \right)^{1/\beta'} \\
&\leq C 2^{-(\epsilon/\beta')s} \alpha \|\mathcal{B}_{j-s}\|_{L^1} \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \left( \frac{1}{|2\mathcal{U}_j|} \int_{2\mathcal{U}_j} \omega^\beta(x) dx \right)^{1/\beta} \\
&\leq C 2^{-(\epsilon/\beta')s} \alpha \|\mathcal{B}_{j-s}\|_{L^1} \inf_{\text{sop } \mathcal{B}_{j-s}} \mathcal{M}^\beta \omega \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \\
&\leq C 2^{-(\epsilon/\beta')s} \alpha \|\mathcal{B}_{j-s}\|_{L^1(\mathcal{M}^\beta \omega)} \|\Lambda\|_{L^\infty}^2,
\end{aligned}$$

que es precisamente (B.ω).

## §2. INTEGRAL SINGULAR CON UN NÚCLEO SIN REGULARIDAD

Dada una función  $\Omega$  integrable sobre la esfera unidad y de media nula, se define la integral singular

$$\mathcal{T}_\Omega f(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{|y| > \eta} \Omega\left(\frac{y}{|y|}\right) \frac{1}{|y|^n} f(x-y) dy,$$

donde  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

En dimensión 1, la condición de media nula se traduce en que  $\Omega(-1) = -\Omega(1)$ , y por tanto  $\mathcal{T}_\Omega$  es un múltiplo de la transformada de Hilbert. Nos ocuparemos por tanto sólo del caso  $n \geq 2$ .

Estos operadores fueron introducidos por A. P. Calderón y A. Zygmund [C-Z1]. Si  $\Omega$  es impar, o sea  $\Omega(-x) = -\Omega(x)$  para casi todo  $x \in S^{n-1}$ , entonces, aplicando el método de rotaciones se deduce de la acotación de la transformada de Hilbert que  $\mathcal{T}_\Omega$  está acotado en  $L^p$  para todo  $1 < p < \infty$ . Cuando  $\Omega$  no es impar es necesario exigir algo más; de hecho se puede encontrar una función par,  $\Omega \in L^1(S^{n-1})$  y tal que  $\mathcal{T}_\Omega$  no está acotado en  $L^2$  (véanse [C-Z2] y [D1], capítulo IV). Sin embargo, si  $\Omega \in L(\log^+ L)(S^{n-1})$ , entonces  $\mathcal{T}_\Omega$  está acotado en  $L^p$  para cualquier  $1 < p < \infty$ . Añadiendo algunas hipótesis sobre la regularidad de  $\Omega$  (condiciones de tipo Dini) resulta que  $\mathcal{T}_\Omega$  es también de tipo débil (1,1). A nosotros nos interesa el otro caso, cuando  $\Omega$  no tiene ninguna regularidad.

El Problema de saber si  $\mathcal{T}_\Omega$  es un operador de tipo débil (1,1), cuando  $\Omega$  no es regular, sólo ha sido estudiado hasta dimensión 5. El resultado es análogo al teorema 2.1 para el operador maximal.

### Teorema 2.9

- (a) (M. Christ, J. L. Rubio de Francia [C-R] S. Hofmann [H1]) Si  $n = 2$ ,  $\Omega \in L(\log^+ L)(S^1)$  y  $\int_{S^1} \Omega = 0$ , entonces,  $\mathcal{T}_\Omega$  es de tipo débil (1,1).
- (b) (M. Christ, J. L. Rubio de Francia [C-R]) Si  $n \leq 5$ ,  $\Omega \in L(\log^+ L)(S^{n-1})$  y  $\int_{S^{n-1}} \Omega = 0$ , entonces,  $\mathcal{T}_\Omega$  es de tipo débil (1,1).

En cuanto a la teoría de pesos para  $\mathcal{T}_\Omega$ , la primera cuestión que hay que resolver es la elección de los candidatos. O sea, nos preguntamos cual es el operador natural  $\mathcal{P}$ , de modo que  $\mathcal{T}_\Omega$  verifique alguna acotación con el par  $(\omega, \mathcal{P}\omega)$ .



Mirando el ejemplo más sencillo, la transformada de Hilbert,  $H$ , que corresponde a  $n = 1$  y  $\Omega(1) = 1/\pi$ , vemos que satisface las desigualdades

$$\int |Hf|^p \omega \leq C_\beta \int |f|^p \mathcal{M}^\beta \omega \quad \text{para } \beta > 1, \quad 1 < p < \infty$$

$$\omega(\{|Hf| > \alpha\}) \leq \frac{C_\beta}{\alpha} \int |f| \mathcal{M}^\beta \omega \quad \text{para } \beta > 1.$$

Otros operadores clásicos en dimensiones superiores, como las transformadas de Riesz, que corresponden a  $\Omega(\bar{y}) = \bar{y}_j$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$ , verifican las mismas desigualdades, también con el par de pesos  $(\omega, \mathcal{M}^\beta \omega)$ .

Por otra parte es lógico pensar que  $\Omega$  debe influir en la forma de los pesos. Así pues,  $\mathcal{M}_{|\bar{\Omega}|}$  también parece un operador que debe intervenir en este problema; de hecho, en el caso de la transformada de Hilbert,  $\mathcal{M}_{|\bar{\Omega}|} \approx \mathcal{M}$ . A continuación enunciamos ciertos resultados ya conocidos que apuntan en esa dirección y que representan la versión del teorema 2.2 para la integral singular que nos ocupa.

**Teorema 2.10**

- a) (S. Hofmann [H3]). Si  $\int_{S^{n-1}} \Omega = 0$  y  $\Omega \in L^q(S^{n-1})$  para algún  $q > 1$ , entonces, para todo par  $p, \beta > 1$ , existe una constante  $C = C(p, \beta, \Omega)$  tal que

$$\int |T_\Omega f(x)|^p \omega(x) dx \leq C \int |f(x)|^p \mathcal{M}^\beta \mathcal{M}_{|\bar{\Omega}|}^\beta \mathcal{M}^\beta \omega(x) dx.$$

- b) (S. Hofmann [H2]). Si  $n = 2$ ,  $\int_{S^1} \Omega = 0$ , y si

b1)  $\Omega \in L^q(S^1)$ ,  $1 < q < \infty$  y  $-2 + \frac{1}{q} < \gamma < 0$ ,

o si

b2)  $\Omega \in L(\log^+ L)(S^1)$  y  $-1 < \gamma < 0$ ,

se tiene

$$\nu^\gamma(\{x : |T_\Omega f(x)| > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int |f(y)| \nu^\gamma(y) dy.$$

- c) (F. Soria, G. Weiss [So-We]). Si  $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ ,  $T_\Omega$  es de tipo débil  $(1,1)$  respecto a la medida de Lebesgue y  $-(n - \frac{n-1}{q}) < \gamma < 0$ , se tiene

$$\nu^\gamma(\{x : |T_\Omega f(x)| > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int |f(y)| \nu^\gamma(y) dy.$$

Como antes, el rango de  $\gamma$  es el óptimo.

Como ocurría con el teorema 2.9 a), el resultado siguiente sólo se ocupa del caso  $n = 2$ .

**Teorema 2.11**

Para todo par  $q, \beta > 1$ , existe una constante  $C = C(\beta, q) > 0$  tal que, si  $\int_{S^1} \Omega = 0$  y  $\Omega \in L^q(S^1)$ , entonces,

$$\omega(\{x : |T_\Omega f(x)| > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int |f| \{ \|\Omega\|_{L^q} \mathcal{M}^\beta \omega + \|\Omega\|_{L^q}^{1/\beta'} \mathcal{M}^\beta \mathcal{M}_{|\Omega|}^\beta \mathcal{M}^\beta \omega \},$$

para cualquier  $\omega \geq 0$  y toda función  $f$  para la que el segundo término sea finito.

Notemos que si  $\Omega(\bar{y}) = \bar{y}_j$ , que corresponde a una de las transformadas de Riesz, o si, con más generalidad,  $|\Omega(\bar{y})| \leq C$ , entonces  $\mathcal{M}^\beta \mathcal{M}_{|\Omega|}^\beta \mathcal{M}^\beta \omega \leq \mathcal{M}^\beta \mathcal{M}^\beta \mathcal{M}^\beta \omega \leq \mathcal{M}^\gamma \omega$  si  $\gamma > \beta$ , con lo que recuperamos el resultado clásico. La observación 2.7 nos proporciona también el teorema óptimo para pesos potencia en el caso  $\Omega \in L^q$ ,  $q > 1$ .

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.11:**

Consideramos los operadores truncados

$$T_{\Omega, \eta} f(x) = \int_{|y| > \eta} \Omega\left(\frac{y}{|y|}\right) \frac{1}{|y|^2} f(x - y) dy.$$

Probaremos que verifican la desigualdad análoga a la que buscamos para  $T_\Omega$ , con constantes que no dependen de  $\eta$ . El lema de Fatou hará el resto.

Esta prueba sigue los pasos de la del teorema 2.3 con algunas pequeñas complicaciones técnicas que haremos notar cuando surjan.

Como antes, tomamos una función  $\phi \in C_0^\infty([1/4, 1])$ ,  $0 \leq \phi \leq 1$  y tal que  $\sum_{\mathbb{Z}} \phi(2^{-j}r) = 1$ , si  $r > 0$ . Definimos

$$K_j(x) = \phi(2^{-j}|x|) \frac{1}{|x|^2} \Omega\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Notemos también que si  $2^{J-1} < \eta \leq 2^J$ , se tiene

$$T_{\Omega, \eta} = \sum_{j=J}^{\infty} K_j * f(x) + N_\eta * f(x),$$

donde

$$|N_\eta(x)| \leq C \left| \Omega\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| 2^{-2J} \chi_{\{2^{J-2} \leq |x| \leq 2^J\}},$$

y que, por lo tanto,

$$|N_\eta * f(x)| \leq \mathcal{M}_{|\Omega|} f(x).$$

En consecuencia es suficiente probar

$$\omega(\{x : |\sum_{j=J}^{\infty} K_j * f(x)| > \alpha\}) \leq \frac{C_{\beta,q}}{\alpha} \int |f| \{ \|\Omega\|_{L^q} \mathcal{M}^\beta \omega + \|\Omega\|_{L^q}^{1/\beta'} \mathcal{M}^\beta \mathcal{M}_{|\tilde{\Omega}|}^\beta \mathcal{M}^\beta \omega \}.$$

Podemos suponer que  $\|\Omega\|_{L^q} = 1$ . Hacemos ahora la descomposición de Calderón-Zygmund de  $f$  a altura  $\alpha$  como en la sección anterior.

### *Sobre la parte buena*

En este caso  $\mathcal{T}_\Omega$  no es un operador acotado en  $L^\infty$  y esto nos obliga a modificar nuestro antiguo argumento. El método habitual para tratar  $g$  cuando se trabaja con integrales singulares es usar la acotación  $L^2$  del operador, que aquí viene dada como un caso particular del teorema 2.10 a) (consúltense [D-R] y [H3]):

$$\|\sum_{j=J}^{\infty} K_j * g\|_{L^2(\omega)} \leq C_{q,\beta} \|g\|_{L^2(\mathcal{M}^\beta \mathcal{M}_{|\tilde{\Omega}|}^\beta \mathcal{M}^\beta \omega)}.$$

Usando la desigualdad de Chebychev queda

$$\begin{aligned} \omega\{x : |\sum_{j=J}^{\infty} K_j * g(x)| > \alpha\} &\leq \frac{1}{\alpha^2} \|\sum_{j=J}^{\infty} K_j * g\|_{L^2(\omega)}^2 \\ &\leq \frac{C_{q,\beta}}{\alpha^2} \int |g|^2 \mathcal{M}^\beta \mathcal{M}_{|\tilde{\Omega}|}^\beta \mathcal{M}^\beta \omega \\ &\leq \frac{C_{q,\beta}}{\alpha} \int |g| \mathcal{M}^\beta \mathcal{M}_{|\tilde{\Omega}|}^\beta \mathcal{M}^\beta \omega \\ &\leq \frac{C_{q,\beta}}{\alpha} \int |f| \mathcal{M}^\beta \mathcal{M}_{|\tilde{\Omega}|}^\beta \mathcal{M}^\beta \omega. \end{aligned}$$

En estas desigualdades hemos usado que  $\|g\|_{L^\infty} \leq 4\alpha$  y  $\mathcal{M} \mathcal{M}^\beta v \leq C_\beta \mathcal{M}^\beta v$  para todo  $\beta > 1$ .

### *Sobre la parte mala*

La parte cercana al soporte de  $b$  se trata como en el caso de  $\mathcal{M}_\Omega$ . Para la parte lejana, definimos  $B_m$  como antes y

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \Omega \chi_{\{\bar{u} \in S^{n-1} : |\Omega(\bar{u})| \leq 2\}}, \\ \Omega_i &= \Omega \chi_{\{\bar{u} \in S^{n-1} : 2^i < |\Omega(\bar{u})| \leq 2^{i+1}\}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

También,

$$K_j^i(x) = \phi(2^{-j}|x|) \frac{1}{|x|^2} \Omega_i \left( \frac{x}{|x|} \right).$$

Si  $x \notin \bigcup_Q 3Q$ , entonces

$$\sum_{j=J}^{\infty} K_j * b(x) = \sum_i \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=J}^{\infty} K_j^i * \mathcal{B}_{j-s}(x).$$

### Lema 2.12

Sea  $\Lambda$  una función integrable y de media nula sobre  $S^1$ .

Sean  $K_j(x) = \frac{1}{|x|^2} \phi(2^{-j}|x|) \Lambda \left( \frac{y}{|y|} \right)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Entonces, con la notación anterior,

$$(A'.\omega) \quad \left\| \sum_j K_j * \mathcal{B}_{j-s} \right\|_{L^1(\omega)} \leq \sum_j \left\| \mathcal{B}_{j-s} \right\|_{L^1(\tilde{K}_j * \omega)}$$

$$(B'.\omega) \quad \left\| \sum_j K_j * \mathcal{B}_{j-s} \right\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C_\beta 2^{-\epsilon(\beta)s} \alpha \|f\|_{L^1(\mathcal{M}^\beta \omega)} \|\Lambda\|_\infty^2$$

para todo  $\beta > 1$ , donde  $\tilde{K}_j = \frac{1}{|x|^2} \phi(2^{-j}|x|) \tilde{\Lambda} \left( \frac{y}{|y|} \right)$ .

Con esto y fijándonos en la prueba del teorema 2.3, podemos obtener una desigualdad con pesos  $(\omega, \mathcal{M}^\beta \omega + \mathcal{M}_{\tilde{\Omega}(\log + \tilde{\Omega})^\beta} \mathcal{M} \omega)$  para el conjunto de nivel de altura  $\alpha$  de  $\mathcal{T}_\Omega b$ . El hecho de que en el enunciado aparezca un par de pesos algo peor, y las hipótesis sobre  $\Omega$  sean más fuertes, se debe a la acotación que hemos hecho para  $g$ .

### DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2.12:

La estimación  $(A'.\omega)$  se deduce de forma inmediata de  $(A.\omega)$ .

Para la estimación  $L^2$ , usaremos la siguiente desigualdad que fue probada por S. Hofmann [H1] y M. Christ y J. L. Rubio de Francia [C-R]:

$$(B'.1) \quad \left\| \sum_j K_j * \mathcal{B}_{j-s} \right\|_{L^2}^2 \leq C 2^{-\epsilon s} \alpha \|b\|_{L^1} \|\Lambda\|_\infty^2.$$

Para probar  $(B'.\omega)$ , sólo tenemos que repetir el argumento que precede a  $(B.\omega)$

poniendo más atención en los detalles.

$$\begin{aligned}
\int |\sum_{j=J}^{\infty} K_j * \mathcal{B}_{j-s}(x)|^2 \omega(x) dx &\leq \int (\sum_j |K_j| * |\mathcal{B}_{j-s}|(x))^2 \omega(x) dx \\
&= \sum_j \int (|K_j| * |\mathcal{B}_{j-s}|(x))^2 \omega(x) dx \\
&\quad + 2 \sum_j \sum_{i < j} \int |K_j| * |\mathcal{B}_{j-s}|(x) |K_i| * |\mathcal{B}_{i-s}|(x) \omega(x) dx \\
&= I + II.
\end{aligned}$$

De las dos partes, la segunda es algo más delicada.

Fijemos  $j$  y asumamos que  $\text{sopb} \subset \mathcal{U}_j = \{x : |x_i| \leq 2^j\}$ .

$$\begin{aligned}
&\sum_{i < j} \int |K_j| * |\mathcal{B}_{j-s}|(x) |K_i| * |\mathcal{B}_{i-s}|(x) \omega(x) dx \\
&\leq \sum_{i < j} \iint |\mathcal{B}_{j-s}(z)| |\mathcal{B}_{i-s}(y)| \int |K_j(x-z)| |K_i(x-y)| \omega(x) dx dy dz \\
&\leq \sum_{i < j} \sum_{\substack{Q \subset 2\mathcal{U}_j \\ Q \in \mathcal{Q}_{i-s}}} \iint |\mathcal{B}_{j-s}(z)| |b_Q(y)| \int_{|x-y| < 2^i} 2^{-2i} 2^{-2j} \omega(x) dx dy dz \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \\
&\leq 2^{-2j} \|\mathcal{B}_{j-s}\|_{L^1} \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \sum_{i < j} \sum_{\substack{Q \subset 2\mathcal{U}_j \\ Q \in \mathcal{Q}_{i-s}}} \alpha |Q| \inf_Q \mathcal{M}\omega
\end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\int |b_Q| \leq 4\alpha |Q|$ .

Como los cubos de la familia  $\mathcal{Q}$  son disjuntos, la última expresión es menor o igual que

$$\begin{aligned}
&2^{-2j} \alpha \|\mathcal{B}_{j-s}\|_{L^1} \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \int_{2\mathcal{U}_j} \mathcal{M}\omega \\
&\leq C \alpha \|\mathcal{B}_{j-s}\|_{L^1} \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \inf_{2\mathcal{U}_j} \mathcal{M}\mathcal{M}\omega \\
&\leq C \alpha^2 \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{j-s}} |Q| \inf_Q \mathcal{M}\mathcal{M}\omega,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado de nuevo la acotación de la norma  $L^1$  de cada  $b_Q$ .

Por último, sumamos en  $j$ , y, después de hacer el cálculo correspondiente a  $I$ , tenemos

$$(\star) \quad \left\| \sum_j K_j * B_{j-s} \right\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C\alpha^2 \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \sum_{Q \in \mathcal{Q}} |Q| \inf_Q \mathcal{M}\mathcal{M}\omega.$$

El último término esá acotado por  $C\alpha \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \|f\|_{L^1(\mathcal{M}\mathcal{M}\omega)}$  (ya que  $\int_Q |f| \approx \alpha |Q|$ ). Sin embargo no podemos utilizar la desigualdad de Hölder como hicimos para obtener (B. $\omega$ ). Para interpolar, y usando que  $\int |b_Q| \leq 4\alpha |Q|$ , comenzamos modificando ligeramente (B'.1) de forma que la expresión se asemeje a  $(\star)$ :

$$(B''.1) \quad \left\| \sum_j K_j * B_{j-s} \right\|_{L^2}^2 \leq C2^{-\epsilon s} \alpha^2 \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \sum_{Q \in \mathcal{Q}} |Q|.$$

A continuación, reinterpretemos estas desigualdades,  $(\star)$  y  $(B''.1)$ , como estimaciones de cierto operador, aún por definir, actuando sobre determinados espacios del tipo  $L^2$ . Para ello, fijada la familia de cubos disjuntos, debidamente numerada,  $\mathcal{Q} = \{Q_i\}_{i \in \mathbb{W} \subset \mathbb{Z}}$  asociada a  $f$  (y a  $\alpha > 0$ ), y dada una sucesión  $a = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset \{0, 1\}$ , consideramos la función

$$f^a(x) = \sum_{Q_i \in \mathcal{Q}} a_i \chi_{Q_i}(x) f(x).$$

Entonces, observamos que la 'parte mala' de una descomposición de Calderón-Zygmund, de nuevo a altura  $\alpha$ , de  $f^a$ , viene dada por

$$b^a = \sum_{Q_i \in \mathcal{Q}} a_i \chi_{Q_i} b = \sum_{Q_i \in \mathcal{Q}} a_i b_{Q_i} = \sum_{Q \in \mathcal{Q}^a} b_Q,$$

donde hemos llamado  $\mathcal{Q}^a = \{Q_i \in \mathcal{Q} / a_i = 1\}$ .

En particular, y esto es fundamental para nuestra demostración, si definimos como antes, para  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$\mathcal{Q}_j^a = \{Q \in \mathcal{Q}^a / \text{lado}(Q) = 2^j\},$$

se tiene

$$B_j^a = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j^a} b_Q = \sum_{Q_i \in \mathcal{Q}_j} a_i b_{Q_i}.$$

Las desigualdades  $(\star)$  y  $(B''.1)$  nos dan, en el caso que nos ocupa, las estimaciones

$$\begin{aligned} \left\| \sum_j K_j * B_{j-s}^a \right\|_{L^2(\omega)}^2 &\leq C\alpha^2 \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i |Q_i| \inf_{Q_i} \mathcal{M}\mathcal{M}\omega, \\ \left\| \sum_j K_j * B_{j-s}^a \right\|_{L^2}^2 &\leq C2^{-\epsilon s} \alpha^2 \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i |Q_i|. \end{aligned}$$

Definamos ahora los pesos siguientes sobre el espacio  $\mathbf{Z}$  :

$$\begin{aligned} \nu_1, \nu_2 : \mathbf{Z} &\longrightarrow \mathbf{R}_+ && \text{con} \\ \nu_1(i) &= |Q_i| \quad \text{si } i \in \mathbf{W}, && \nu_1(i) = 0 \quad \text{si } i \notin \mathbf{W}, \\ \nu_2(i) &= |Q_i| \inf_{Q_i} \mathcal{M}\mathcal{M}\omega \quad \text{si } i \in \mathbf{W}, && \nu_2(i) = 0 \quad \text{si } i \notin \mathbf{W}. \end{aligned}$$

Esto nos permite considerar el operador, para  $s$  fijo,

$$a = \{a_i\}_{i \in \mathbf{Z}} \longrightarrow (\mathbf{T}_s a)(x) = \sum_j K_j * B_{j-s}^a(x).$$

Con la notación anterior, las estimaciones obtenidas se traducen en

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}_s a\|_{L^2(\omega)}^2 &\leq C\alpha^2 \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \|a\|_{\ell^2(\nu_2)}^2 \quad \text{y} \\ \|\mathbf{T}_s a\|_{L^2}^2 &\leq C2^{-\epsilon s} \alpha^2 \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \|a\|_{\ell^2(\nu_1)}^2, \end{aligned}$$

siempre y cuando  $a = \{a_i\}$  esté formada por unos y ceros, o sea, cuando se corresponda con una función característica de un subconjunto de  $\mathbf{Z}$ . Dicho de otro modo,  $\mathbf{T}_s$  es de 'tipo fuerte restringido 2' respecto a los pares de medidas  $(\nu_1 d\mu, dx)$ ,  $(\nu_2 d\mu, \omega(x)dx)$ , con constantes  $C2^{-\epsilon s/2} \alpha \|\Lambda\|_{L^\infty}$  y  $C\alpha \|\Lambda\|_{L^\infty}$  respectivamente. (Aquí  $d\mu$  representa la medida usual de contar sobre  $\mathbf{Z}$ .)

Así pues, está claro cuál es el teorema de interpolación que necesitamos, y que enunciamos en el siguiente

### Lema 2.13

Sea  $T$  un operador sublineal que cumple

$$\begin{aligned} T : L^{p,1}(v_o) &\longrightarrow L^p(\omega_o) \text{ con constante } C_o, \\ T : L^{p,1}(v_1) &\longrightarrow L^p(\omega_1) \text{ con constante } C_1. \end{aligned}$$

Entonces, para todo  $0 \leq \theta \leq 1$ ,

$$T : L^{p,1}(v_1^\theta v_o^{1-\theta}) \longrightarrow L^p(\omega_1^\theta \omega_o^{1-\theta}) \text{ con constante } C_1^\theta C_o^{1-\theta}.$$

Aplicado a nuestro problema, este lema nos dice que para todo  $0 \leq \theta < 1$ , si  $\{a_i\}$  es una función característica, se tiene

$$\|\mathbf{T}_s \{a_i\}\|_{L^2(\omega_o)}^2 \leq C2^{-\epsilon(1-\theta)s} \alpha^2 \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \sum a_i |Q_i| \inf_{Q_i} (\mathcal{M}\mathcal{M}\omega)^\theta.$$

Cambiando  $\omega^\theta$  por  $\omega$  y considerando el caso particular en que  $a_i = 1$  para todo  $i \in \mathbf{W}$ ,  $a_i = 0$  si  $i \notin \mathbf{W}$ , obtenemos

$$(B'' \omega) \quad \left\| \sum_j K_j * \mathcal{B}_{j-s} \right\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C 2^{-\epsilon(1-\theta)s} \alpha^2 \|\Lambda\|_{L^\infty}^2 \sum_{Q \in \mathcal{Q}} |Q| \inf_Q (\mathcal{M} \omega^{1/\theta})^\theta$$

si  $0 \leq \theta < 1$ .

Para acabar, recordemos que  $\int_Q |f| \approx \alpha |Q|$  y observemos que  $(\mathcal{M} v)^{1/\beta}$  es un peso  $A_1$  si  $\beta > 1$ . Elegimos  $1/\theta < \beta$  y resulta  $(B' \omega)$ .

Queda pendiente la

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2.13:

Sin pérdida de generalidad podemos suponer  $C_0 = C_1 = 1$ . Probaremos primero que para cualquier conjunto medible  $\mathcal{A}$ ,

$$\int |T\chi_{\mathcal{A}}|^p \omega_0 \wedge \omega_1 \leq \int_{\mathcal{A}} v_0 \wedge v_1,$$

donde  $a \wedge b$  indica el mínimo de las cantidades  $a$  y  $b$ .

Sean  $\mathcal{A}_0 = \{x \in \mathcal{A} / v_0(x) \leq v_1(x)\}$  y  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int |T\chi_{\mathcal{A}}|^p \omega_0 \wedge \omega_1 &\leq 2^p \int |T\chi_{\mathcal{A}_0}|^p \omega_0 + 2^p \int |T\chi_{\mathcal{A}_1}|^p \omega_1 \\ &\leq 2^p \int_{\mathcal{A}_0} v_0 + 2^p \int_{\mathcal{A}_1} v_1 \\ &\leq 2^p \int_{\mathcal{A}} v_0 \wedge v_1. \end{aligned}$$

A continuación usaremos la identidad

$$\int_0^\infty t^{-\theta p} (a \wedge t^p b) \frac{dt}{t} \approx a^{1-\theta} b^\theta.$$

Así concluimos

$$\begin{aligned} \int |T\chi_{\mathcal{A}}|^p \omega_0^{1-\theta} \omega_1^\theta &\approx \int |T\chi_{\mathcal{A}}|^p \int_0^\infty t^{-\theta p} (\omega_0(x) \wedge t^p \omega_1(x)) \frac{dt}{t} dx \\ &= \int_0^\infty t^{-\theta p} \int |T\chi_{\mathcal{A}}|^p (\omega_0(x) \wedge t^p \omega_1(x)) dx \frac{dt}{t} \\ &\leq \int_0^\infty t^{-\theta p} 2^p \int_{\mathcal{A}} v_0(x) \wedge t^p v_1(x) dx \frac{dt}{t} \\ &\approx 2^p \int_{\mathcal{A}} v_0^{1-\theta} v_1^\theta. \end{aligned}$$



### §3. BOCHNER-RIESZ EN EL ÍNDICE CRÍTICO. PESOS $A_1$

Dada  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , se define su transformada de Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Se comprueba que es una isometría en  $\mathcal{S}$  con la norma  $L^2$ . Además, podemos recuperar la función  $f$  a partir de su transformada de Fourier: si definimos la transformada inversa de Fourier como

$$\check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2\pi i x \xi} dx,$$

entonces  $(\hat{f})^\vee(x) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

El hecho de que la transformada de Fourier sea una isometría nos permite extenderla a un operador continuo en  $L^2$ , que denotamos del mismo modo. Lo mismo ocurre con la transformada inversa. Por tanto:

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L^2} &= \|f\|_{L^2} \quad \text{para toda } f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad (\text{identidad de Plancherel}) \\ (\hat{f})^\vee &= f \quad \text{para toda } f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad (\text{fórmula de inversión}) \end{aligned}$$

A la vista de la segunda identidad, se plantea el problema de estudiar la convergencia esférica de la transformada de Fourier, es decir si

$$S_R f(x) = \int_{\{|\xi| \leq R\}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int \chi_{\{|\xi| \leq R\}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

converge a  $f$  en norma  $L^p$  o en casi todo punto, cuando  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . La identidad de Plancherel, la fórmula de inversión y el teorema de la convergencia dominada nos dicen que  $S_R f \xrightarrow{R \rightarrow \infty} f$  en norma  $L^2$ . Por otro C. Fefferman [F1] demostró que si  $p \neq 2$  y  $n \geq 2$ , no hay convergencia en norma. Esto tiene también consecuencias sobre la convergencia en casi todo punto: E. M. Stein probó que en espacios de medida finita, la convergencia en casi todo punto, para funciones de  $L^p$ , de una sucesión de operadores que preservan la estructura del espacio, equivale, si  $1 \leq p \leq 2$ , a la acotación del operador maximal asociado, y es, por tanto, más fuerte que la convergencia en norma. Aplicado a nuestro problema, y teniendo en cuenta la relación entre series y transformada de Fourier, da como resultado que, por el teorema de C. Fefferman, si  $p < 2$  no hay tampoco convergencia en casi todo punto. Queda aún por resolver el problema de la convergencia en casi todo punto

para  $2 \leq p < \frac{2n}{n-1}$ , hecho que se deduciría directamente de la convergencia en  $L^2$ , puesto que en dicho rango es conocido el correspondiente resultado de localización (véase [C-S]).

El problema de la sumación esférica consiste en preguntarse si las 'sumas' de Cesaro que corresponden a  $S_R f$  convergen en algún sentido a  $f$ . Estas sumas de Cesaro se definen como

$$\begin{aligned} C_R f(x) &= \frac{1}{R} \int_0^R S_t f(x) dt \\ &= \frac{1}{R} \int_0^R \int_{\{|\xi| \leq t\}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi dt \\ &= \frac{1}{R} \int_{\{|\xi| \leq R\}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} \left\{ \int_{|\xi|}^R dt \right\} d\xi \\ &= \int \hat{f}(\xi) \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right)_+ e^{2\pi i x \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Con esto, el problema de estudiar un multiplicador nada suave, el multiplicador del disco,  $\chi_{\{|\xi| \leq R\}}$ , se cambia por otro con un multiplicador con algo de regularidad:  $(1 - |\xi|)_+$ .

Entre ambos hay una gama de multiplicadores intermedios  $(1 - |\xi|)_+^\lambda$ . El estudio de éstos es equivalente al de  $m_\lambda(\xi) = (1 - |\xi|^2)_+^\lambda$ , que resultan ser más manejables. Estos  $m_\lambda$  son los multiplicadores de Bochner-Riesz.

La transformada de Fourier de  $m_\lambda$  es

$$K^\lambda(x) = \pi_{-\lambda} \Gamma(\lambda + 1) |x|^{-n/2-\lambda} \mathcal{J}_{\frac{n}{2}+\lambda}(2\pi|x|)$$

donde  $\mathcal{J}_{\frac{n}{2}+\lambda}$  es la función de Bessel de orden  $n/2 + \lambda$  (véase [S-W]).

Del comportamiento asintótico de las funciones de Bessel se deduce que

$$|K^\lambda(x)| \leq \frac{C_\lambda}{1 + |x|^{\frac{n+1}{2}+\lambda}}$$

Por tanto, si  $\lambda > \frac{n-1}{2}$  el operador de convolución con  $K^\lambda$  está mayorado por el operador maximal de Hardy-Littlewood y por tanto hereda todas las propiedades de acotación de éste.

Si  $\lambda = \frac{n-1}{2}$  (exponente crítico), entonces  $|K^{\frac{n-1}{2}}| \approx \frac{C}{|x|^n}$  para  $|x| \rightarrow \infty$ . Por tanto el operador asociado a  $m_{\frac{n-1}{2}}$ , al que denotaremos simplemente por  $\mathcal{T}$ , es

una integral singular. No es regular, ya que no cumple ninguna condición de tipo Hörmander. Sin embargo, se puede ver que está acotado en  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ , a partir de la acotación  $L^2$  del multiplicador del disco y de la acotación  $L^p$  de los multiplicadores de Bochner–Riesz cuando  $\lambda > \frac{n-1}{2}$ , y usando el teorema de interpolación de familias analíticas de operadores (ver [S-W]). Así pues, a pesar de no ser una integral singular regular, las propiedades de acotación de  $T$  resultan ser buenas. El resultado en el extremo,  $p = 1$ , fue obtenido recientemente por M. Christ.

**Teorema 2.14 (M. Christ [C])**

*$T$  es de tipo débil  $(1,1)$ .*

El teorema que presentamos a continuación nos dice que podemos extender la acotación débil  $(1,1)$  cuando la medida utilizada está dada por un peso cualquiera en la clase  $A_1$  de Muckenhoupt.

**Teorema 2.15**

*Si  $\omega \in A_1$ , entonces*

$$\omega(\{x / |Tf(x)| > \alpha\}) \leq \frac{C(\omega)}{\alpha} \int |f(y)|\omega(y) dy,$$

*donde  $C(\omega)$  sólo depende de la constante  $A_1$  de  $\omega$ .*

De este resultado se deduce, utilizando los conocidos teoremas de extrapolación (ver [G-R]) la acotación en  $L^p(\omega)$ ,  $\omega \in A_p$ ,  $1 < p < \infty$ , lo cual acentúa aún más el carácter casi estándar de este operador fuertemente singular.

Los pesos  $A_1$  están completamente caracterizados por la siguiente propiedad: si  $v$  es una función localmente integrable y  $Mv(x) < \infty$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n$ , entonces, para todo  $0 \leq \delta < 1$ ,  $(Mv)^\delta$  es un peso  $A_1$  con una constante que sólo depende de  $\delta$ . Recíprocamente, todos los pesos  $A_1$  son de la forma  $\omega = k(Mv)^\delta$ , con  $\delta < 1$ ,  $\|k\|_{L^\infty} \leq 1$ ,  $\|1/k\|_{L^\infty} \leq C(\omega)$  y donde  $\delta$  y  $C(\omega)$  sólo dependen de la constante  $A_1$  de  $\omega$ . En consecuencia podemos escribir el teorema 2.15 de un modo equivalente y más acorde con los teoremas de las secciones anteriores, como sigue:

**Teorema 2.16**

*Dado  $\beta > 1$ , existe  $C(\beta)$  tal que*

$$\omega(\{x / |Tf(x)| > \alpha\}) \leq \frac{C(\beta)}{\alpha} \int |f(y)|\mathcal{M}^\beta \omega(y) dy.$$

Podríamos plantearnos la tarea de mejorar este teorema, hasta obtener  $\mathcal{M}$  en lugar de  $\mathcal{M}^\beta$ . Pero teniendo en cuenta el estado actual de la teoría de pesos para integrales singulares regulares, éste que presentamos es el mejor teorema que cabe esperar: ni siquiera para la transformada de Hilbert se sabe si es cierta la desigualdad

$$\omega(\{x / |Hf(x)| > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int |f(y)| \mathcal{M}\omega(y) dy.$$

#### DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.15:

De las tres demostraciones que hay en este capítulo, ésta es la más sencilla, como veremos en seguida.

De la expansión asintótica de las funciones de Bessel deducimos que

$$K^{\frac{n-1}{2}}(x) = c_n \frac{\cos(2\pi|x| - \pi\frac{n-1}{4} - \frac{\pi}{4})}{|x|^n} \chi_{\{1 \leq |x| < \infty\}} + O\left(\frac{1}{1 + |x|^{n+1}}\right)$$

Por tanto es suficiente estudiar la convolución con  $\sum_{j=1}^{\infty} K_j$ , donde

$$K_j(x) = \frac{\cos(2\pi|x| - \pi\frac{n-1}{4} - \frac{\pi}{4})}{|x|^n} \phi(2^{-j}|x|)$$

y  $\phi \in C_0^\infty([1/4, 1])$ .

Como ya habrá adivinado el lector, hacemos la descomposición de Calderón-Zygmund de  $f$  a altura  $\alpha$ .

#### *Sobre la parte buena*

Como en el caso de  $\mathcal{T}_\Omega$ , necesitamos una acotación  $L^2$  con peso.

Para obtenerla, haremos uso de una estimación sin peso debida a M. Christ. Por nuestra parte, podemos hacer una torpe estimación con peso, e interpolar entre ambas con cambio de medida. La primera dice simplemente

$$(i) \quad \|K_j * f\|_2 \leq C 2^{-\lambda j/2} \|f\|_2 \quad (\text{M. Christ [C]})$$

donde  $\lambda = \frac{n-1}{2}$ .

Para nuestra acotación sólo necesitamos saber que  $|K_j| \leq C 2^{-jn} \chi_{\{|x| \leq 2^j\}}$  y que  $\|K_j\|_{L^1} \leq C$ . De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} \int |K_j * f(x)|^2 \omega(x) dx &\leq \int |K_j| * |f|^2(x) \omega(x) dx \leq \int |f(y)|^2 |K_j| * \omega(x) dx \\ &\leq \int |f(y)|^2 \mathcal{M}\omega(x) dx. \end{aligned}$$

Interpolando con cambio de medida con el teorema de Stein-Weiss (véase en [B-L]), queda

$$(i.\omega) \quad \|K_j * f\|_{L^2(\omega)} \leq 2^{-\epsilon(\beta)j/2} \|f\|_{L^2(\mathcal{M}^\beta \omega)} \quad \text{para todo } \beta > 1.$$

Sumando en  $j$  y usando la desigualdad de Chebychev, terminamos el cálculo para el conjunto de nivel de  $g$ .

### *Sobre la parte mala*

Esta parte de la prueba es mucho más sencilla que las que hicimos en las dos secciones anteriores. Vamos a probar

$$(ii.\omega) \quad \left\| \sum_{j=1}^{\infty} K_j * b \right\|_{L^2((\cup 3Q)^c, \omega(x)dx)} \leq C\beta\alpha \|f\|_{L^1(\mathcal{M}^\beta \omega)} \quad \text{para todo } \beta > 1$$

y después sólo quedará usar la desigualdad de Chebychev.

Definimos  $B_m$  de una forma ligeramente diferente a la de las otras secciones

$$B_m = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_m} b_Q \quad \text{si } m = 1, 2, 3, \dots$$

$$B_0 = \sum_{l(Q) \leq 1} b_Q$$

Esto se adapta al hecho de que aquí tenemos  $\sum_{j=1}^{\infty} K_j$  y no  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} K_j$  como en los otros dos problemas.

Notemos que si  $x \notin \bigcup_Q 3Q$ , entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} K_j * b(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=s}^{\infty} K_j * B_{j-s}(x).$$

Para probar (ii. $\omega$ ) tenemos a nuestra disposición una estimación de M. Christ [C].

$$(ii) \quad \left\| \sum_{j=s}^{\infty} K_j * B_{j-s} \right\|_{L^2}^2 \leq C 2^{-\lambda s} \alpha \|b\|_{L^1}.$$

La repetición de los cálculos que hicimos en la sección 2 nos lleva a

$$(\star\star) \quad \left\| \sum_j K_j * B_{j-s} \right\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C\alpha^2 \sum_{Q \in \mathcal{Q}} |Q| \inf_Q \mathcal{M}\mathcal{M}\omega.$$

Siguiendo los pasos de la sección anterior probamos que

$$\left\| \sum_j K_j * B_{j-s} \right\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C\beta 2^{-\epsilon(\beta)s} \alpha \|f\|_{L^1(\mathcal{M}^\beta \omega)} \quad \text{para } \beta > 1.$$

Por último, sumamos en  $s$  para obtener (ii. $\omega$ ).

### CAPÍTULO 3

#### UNA DESIGUALDAD CON PESO PARA EL OPERADOR MAXIMAL DE KAKEYA

#### §1. INTRODUCCIÓN Y ENUNCIADO DE LOS TEOREMAS

Dado  $0 < \delta < 1$  definimos una base de diferenciación,  $\mathfrak{B}^\delta$ , formada por todos los paralelepípedos homotéticos a  $(0, \delta)^{n-1} \times (0, 1)$  y dirección arbitraria. Llamaremos 'rectángulos de excentricidad  $\delta$ ' a los elementos de  $\mathfrak{B}^\delta$  y 'longitud del rectángulo' a la longitud de la arista mas larga del mismo. También para cada punto definimos  $\mathfrak{B}_x^\delta = \{R \in \mathfrak{B}^\delta : x \in R\}$ . El operador maximal asociado a  $\mathfrak{B}^\delta$  es el operador maximal de Keakeya de excentricidad  $\delta$ ,

$$\mathcal{K}_\delta f(x) = \sup_{R \in \mathfrak{B}_x^\delta} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy \quad \text{para } f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Este operador maximal apareció en el trabajo de C. Fefferman [F2], quien conjeturó que debería de 'controlar' en cierta manera la oscilación de los operadores multiplicadores de Bochner–Riesz (sobre uno de los cuales hablamos en la sección 3 del capítulo 2), que están definidos por

$$\widehat{T_\lambda f}(\xi) = (1 - |\xi|^2)_+^\lambda \hat{f}(\xi).$$

Poco después, A. Córdoba hizo patente la relación entre ambos operadores ([Co1], [Co3]).

A lo largo de los años se ha ido precisando la conjetura de Fefferman. Para entender bien qué significa ahora para nosotros que un operador controle a otro, debemos recordar el principio de acotación de J. L. Rubio de Francia (véanse [R] y [G–R] pag 558): sean  $1 < p < \infty$  y  $\frac{1}{\alpha} = |1 - \frac{2}{p}|$ . Un operador lineal  $T$  está acotado

en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  si y sólo si para cada  $u \in L^\alpha$ ,  $u \geq 0$ , existe  $w \in L^\alpha$ ,  $w \geq 0$ , tal que

$$\begin{aligned} u(x) &\leq w(x) && \text{para casi todo } x \\ \|w\|_\alpha &\leq 2\|u\|_\alpha \end{aligned}$$

de modo que  $T$  es acotado en  $L^2(w)$  si  $p \geq 2$  o en  $L^2(w^{-1})$  si  $p < 2$ , con norma independiente de  $u$ .

En el caso  $p \geq 2$ , si llamamos  $P$  al operador que a cada  $u$  le asigna el correspondiente  $w$ , el principio de acotación implica que

$$\begin{aligned} Pu &\geq u && \text{para todo } u \geq 0, \quad u \in L^\alpha \\ \|P\|_{L^\alpha \rightarrow L^\alpha} &\leq 2 \\ \int |Tf|^2 u &\leq C \int |f|^2 Pu \end{aligned}$$

con  $C$  independiente de  $u$  y  $f$ . Se suele decir que  $P$  controla a  $T$ , o, con más exactitud, que  $P$  controla las desigualdades ( $L^2$ ) con peso de  $T$ .

La acotación de los operadores de Bochner–Riesz está asociada a la acotación  $L^{\frac{2n}{n-1}}$  del operador asociado a un multiplicador adaptado al anillo  $\{1 - \epsilon < |\xi| < 1\}$  (véanse [F2], [Co1], [Co3]): sea  $m_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , tal que  $\text{sop } m_\epsilon \subset \{1 - \epsilon < t < 1\}$ ,  $\epsilon < 1/2$  y  $\|\frac{d^k}{dt^k} m_\epsilon\|_{L^\infty} \leq C_k \epsilon^{-k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Se define  $\widehat{T^\epsilon f}(\xi) = m_\epsilon(|\xi|)\hat{f}(\xi)$ . Cada operador  $T_\lambda$  se puede escribir como suma de operadores de esta forma,

$$T_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\lambda} T^{2^{-k}} + T^0,$$

con  $T^0$  mayorado por el operador maximal de Hardy–Littlewood. La acotación esperada, de acuerdo con la propia conjetura para el problema de Bochner–Riesz, es

$$\|T^\epsilon f\|_{L^{\frac{2n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{C}_n \left( \log \frac{1}{\epsilon} \right)^{\beta_n} \|f\|_{L^{\frac{2n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)},$$

donde  $\beta_n, \tilde{C}_n > 0$  serán dos constantes que sólo dependerán de la dimensión y de  $\{C_k\}_{k=0}^\infty$ . Esta estimación está probada en dimensión 2 ([Co1], [Co3]).

Sabemos, por el principio de acotación, que esta estimación equivale a la existencia de un operador positivo que controle a  $T^\epsilon$ . Se espera que ese operador sea parecido a  $\mathcal{K}_\epsilon$  (una versión de este problema fue propuesta por E. M. Stein [S3], y tenemos que aclarar que el principio de acotación es muy posterior). Hasta donde llegan nuestros conocimientos, el mejor resultado en ese sentido se debe a

A. Carbery [Ca], que probó que el operador maximal de Bochner–Riesz en dimensión 2, está controlado por un operador que tiene que ver directamente con el de Kakeya, aunque su descripción es más complicada.

Notemos que, si se verificase

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T^\epsilon f|^2 u \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 P u,$$

entonces, el hecho de que el dual de  $L^{\frac{n}{n-1}}$  es  $L^n$  y la desigualdad de Hölder nos permitirían acotar

$$\begin{aligned} \|T^\epsilon f\|_{\frac{2n}{n-1}}^{\frac{2n}{n-1}} &\leq \| |T^\epsilon f|^2 \|_{\frac{n}{n-1}}^{\frac{n}{n-1}} \\ &\leq \sup_{\|u\|_n=1} \left( \int |T^\epsilon f|^2 u \right)^{\frac{n}{n-1}} \\ &\leq C \sup_{\|u\|_n=1} \left( \int |f|^2 P u \right)^{\frac{n}{n-1}} \\ &\leq C \sup_{\|u\|_n=1} \|P u\|_{L^n}^{\frac{n}{n-1}} \|f\|_{\frac{2n}{n-1}}^{\frac{2n}{n-1}} \\ &\leq C \|P\|_{L^n \rightarrow L^n}^{\frac{n}{n-1}} \|f\|_{\frac{2n}{n-1}}^{\frac{2n}{n-1}}. \end{aligned}$$

Así pues, para que el operador  $P$  sea un controlador interesante, debe cumplir que  $\|P\|_{L^n \rightarrow L^n} \leq C_\eta \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^\eta$ , para todo  $\eta > 0$ . En particular, bastaría con que  $\|P\|_{L^n \rightarrow L^n} \leq C (\log(1/\epsilon))^\gamma$ , para cierto  $\gamma > 0$ . A. Córdoba [Co1] probó que el operador de Kakeya cumple esa acotación en dimensión 2 (ver también [St2]).

La conjetura es, pues, que  $\mathcal{K}_\delta$  está acotado en  $L^n(\mathbb{R}^n)$  con una constante

$$C_n \left(1 + \log \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha_n}$$

para algún par de constantes  $C_n, \alpha_n > 0$ , independiente de  $\delta$ .

Si la conjetura fuera cierta, interpolando se probaría que

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \begin{cases} C_n \left(1 + \log \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha_n} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} & \text{si } p \geq n, \\ C_{n,p} \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{n}{p}-1} \left(1 + \log \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha_n} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} & \text{si } 1 < p < n. \end{cases}$$



Si  $p > n$  esta estimación se obtendría interpolando con la obvia en  $L^\infty$  :  $\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ . El resultado para  $1 < p < n$  resultaría de interpolar con la estimación de tipo débil (1,1):  $\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^{1,\infty}} \leq C(1/\delta)^{n-1} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ , que se obtiene a partir del resultado clásico para el operador maximal de Hardy–Littlewood.

Como ya mencionamos antes, la conjetura está probada en dimensión 2. Más aún, D. Müller y F. Soria [M-So] probaron una desigualdad con peso que generaliza la anterior y muestra que el operador de Keakeya en dimensión 2 se controla a sí mismo, es decir,

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^2, \omega)} \leq C \left(1 + \log \frac{1}{\delta}\right)^\alpha \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{K}_\delta \omega)}.$$

Hay un motivo claro para preguntarse si se verifican estimaciones con peso como esta.  $T^\epsilon f$  se descompone en trozos (que en dimensión 2 son ‘casi ortogonales’) que están acotados por  $\mathcal{K}_{\sqrt{\epsilon}} f$  puntualmente, de modo que, si queremos demostrar que un operador de Keakeya controla a  $T^\epsilon$ , un buen principio es encontrar estimaciones como la anterior para el propio operador maximal de Keakeya.

En dimensiones superiores, el problema de la acotación del operador maximal de Keakeya sigue abierto. M. Christ, J. Duoandikoetxea y J. L. Rubio de Francia [C-D-R] probaron que

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p} \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{n}{p}-1} \left(1 + \log \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha_n} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{si } p \leq \frac{n+1}{2}.$$

Recientemente J. Bourgain [B] ha demostrado que existe un número  $p_n > \frac{n+1}{2}$ , de modo que la misma desigualdad es cierta para todo  $p \leq p_n$ .

A. Carbery, E. Hernández y F. Soria [C-H-S] han probado que si restringimos el dominio del operador al conjunto de las funciones radiales de  $L^p$ , las constantes de acotación son las esperadas.

El objeto de este capítulo es demostrar una versión con peso del teorema de M. Christ, J. Duoandikoetxea y J. L. Rubio de Francia, en la que Keakeya controla a Keakeya, pero de una forma diferente a la que resulta de aplicar el principio de acotación. Nuestra desigualdad pertenece a la misma familia que las desigualdades con peso de Fefferman y Stein para el operador maximal de Hardy–Littlewood. El resultado que presentamos es el siguiente:

**Teorema 3.1**

Sean  $n \geq 3$  y  $\mathcal{K}_\delta$  el operador maximal de *Kekeya* de excentricidad  $\delta$  en dimensión  $n$ . Para todo  $1 < p \leq \frac{n+1}{2}$ , existen constantes  $C_{n,p}$ ,  $\alpha_n > 0$ , tales que, para cada  $0 < \delta < 1/2$  y cada peso  $\omega$ , se verifica:

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(\omega)} \leq C_{n,p} \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{n}{p}-1} \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha_n} \|f\|_{L^p(\mathcal{K}_\delta \omega)}.$$

Para probar el teorema se trabaja primero con un operador algo más pequeño. Definimos

$$\mathcal{M}_\delta^\ell f(x) = \sup \frac{1}{|R_x|} \int_{R_x} |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los rectángulos de excentricidad  $\delta$  y longitud  $\ell$  que contienen a  $x$ . Denotaremos por  $\mathcal{M}_\delta$  a  $\mathcal{M}_\delta^1$ .

El Teorema 2.1 es una consecuencia de una estimación de tipo débil restringido para  $\mathcal{M}_\delta$ .

**Teorema 3.2**

Existe una constante  $C_n > 0$ , tal que

$$\omega(\{y : \mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma\}) \leq C_n \sigma^{-\frac{n+1}{2}} \delta^{-\frac{n-1}{2}} \mathcal{K}_\delta \omega(A),$$

para todo conjunto medible  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma > 0$  y  $0 < \delta < 1/2$ .

Para obtener el teorema 3.1 como corolario del teorema 3.2, haremos un argumento de ‘criba’ y posteriormente usaremos un teorema de interpolación ‘a tres bandas’. En la próxima sección explicaremos bien todo esto y demostraremos el teorema 3.2.

## §2. DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS

### DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.2:

En primer lugar, haremos algunas simplificaciones que serán útiles más adelante. Notemos que en la definición de  $\mathcal{M}_\delta$  es indiferente tomar el supremo sobre todas los rectángulos que contienen a  $x$  o sólo sobre aquellos que además tienen su centro en  $\mathbb{Q}^n$ . Lo mismo ocurre si fijamos un conjunto denso y numerable  $\mathcal{W} \subset S^{n-1}$  que determine sus direcciones. Así, si definimos

$$\hat{\mathfrak{B}}_x^{\delta,1} = \left\{ \begin{array}{l} R \text{ rectángulos de excentricidad } \delta \text{ y longitud } 1, \\ \text{que contienen a } x, \text{ con centro en } \mathbb{Q}^n \\ \text{y eje paralelo a alguna de las direcciones de } \mathcal{W} \end{array} \right\},$$

se cumple que

$$\mathcal{M}_\delta f(x) = \sup_{R \in \hat{\mathfrak{B}}_x^{\delta,1}} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy.$$

Además, podemos suponer que  $A \subset B_1(0)$ . Siguiendo los primeros pasos del programa de J. Bourgain [B], para cada  $y$  tal que  $\mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma$  seleccionamos un rectángulo  $R_y \in \hat{\mathfrak{B}}_y^{\delta,1}$  de modo que  $|R_y \cap A| > \sigma |R_y| = \sigma \delta^{n-1}$ . Para cada  $x \in A$ , definimos el 'arbusto' centrado en  $x$ , como

$$B_x = \bigcup_{x \in R_y} R_y.$$

El primer paso de la prueba es ver que existe un punto  $x_0 \in A$  tal que

$$(1) \quad \omega(B_{x_0}) \geq \sigma \delta^{n-1} \frac{\omega(\{y : \mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma\})}{|A|}.$$

Esta desigualdad resulta de un sencillo cálculo. Notemos que el hecho de que  $\bigcup_x \hat{\mathfrak{B}}_x^{\delta,1}$  sea un conjunto numerable hace que  $\omega(B_x)$  sea medible. Escribimos ahora

$$\int_A \omega(B_x) dx = \int_A \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_x}(y) \omega(y) dy dx = \int_{\{y : \mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma\}} \omega(y) \int_A \chi_{B_x}(y) dx dy.$$

Ahora bien, si  $\mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma$  y  $z \in R_y$ , entonces  $y \in R_y \subset B_z$ , de forma que

$\chi_{B_x}(y) \geq \chi_{R_y}(z)$  y, de hecho,  $\chi_{B_x}(y) \geq \chi_{R_y}(x)$  para todo  $x$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_A \omega(B_x) dx &\geq \int_{\{y: \mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma\}} \omega(y) \int_A \chi_{R_y}(x) dx dy \\
&= \int_{\{y: \mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma\}} \omega(y) |R_y \cap A| dy \\
&\geq \int_{\{y: \mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma\}} \omega(y) \sigma \delta^{n-1} dy \\
&= \sigma \delta^{n-1} \omega(\{y : \mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma\}),
\end{aligned}$$

lo cual implica que existe al menos un punto  $x_0 \in A$  con la propiedad (1).

Nuestra intención ahora es ‘podar el arbusto’. Elegiremos un subconjunto  $\mathcal{E} \subset \{y : x_0 \in R_y\} = \mathcal{E}_0$  y formaremos un arbusto con menos ramas,  $B = \bigcup_{y \in \mathcal{E}} 5R_y$  tal que,

$$(2) \quad \frac{c_n \sigma^n \delta^{n-1} \omega(\{y : \mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma\})}{|A|} \leq \omega(B) \leq \frac{c'_n}{\sigma} \mathcal{K}_\delta \omega(A \cap B).$$

En ese momento convendrá observar un sencillo hecho: si  $y \in B_2(0)$ , entonces  $\mathcal{K}_\delta \omega(y) \geq c_n \omega(B_2(0))$ , y, puesto que hemos asumido que  $A \subset B_1(0)$ , resulta que  $\mathcal{K}_\delta \omega(A) \geq c_n \omega(B_2(0)) |A| \geq c_n \omega(\{y : \mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma\}) |A|$ . Usando (2) obtendremos,

$$\begin{aligned}
&\sigma^n \delta^{n-1} \frac{(\omega(\{y : \mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma\}))^2}{\mathcal{K}_\delta \omega(A)} \\
&\leq \frac{c_n \sigma^n \delta^{n-1} \omega(\{y : \mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma\})}{|A|} \\
&\leq \frac{c'_n}{\sigma} \mathcal{K}_\delta \omega(A \cap B),
\end{aligned}$$

y al despejar  $(\omega(\{y : \mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma\}))^2$ , quedará

$$(\omega(\{y : \mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma\}))^2 \leq C_n \sigma^{-n-1} \delta^{-n+1} (\mathcal{K}_\delta \omega(A))^2,$$

que es el teorema 3.2.

La prueba de (2) comienza por la selección de un subconjunto  $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_0$  que cumpla

$$(3) \quad \text{áng}(R_y, R_z) \geq 10 \frac{\delta}{\sigma} \quad \text{si } y, z \in \mathcal{E} \quad y \neq z,$$

$$(4) \quad \omega\left(\bigcup_{y \in \mathcal{E}} 5R_y\right) \geq c_n \omega(B_{x_0}) \sigma^{n-1},$$

donde  $\text{áng}(R_y, R_z)$  denota el ángulo entre los ejes principales de  $R_y$  y  $R_z$ .

Para ver que esto es posible, consideremos la bola de centro  $x_0$  y radio 1. Con el fin de no complicar la notación asumiremos que  $x_0 = 0$ . Dividimos la bola en  $c_n \left(\frac{1}{\delta}\right)^{n-1}$  regiones 'casicónicas',  $\{C_i\}$ , o sea, que cumplen, a) si  $y \neq 0$ ,  $y \in C_i$  si y sólo si  $\frac{y}{|y|} \in C_i$  y b) si  $y, z \in C_i$ ,  $y \neq 0 \neq z$ , entonces  $\text{áng}(y, z) < \delta$ . A cada región le asignamos, si existe alguno, un punto  $y_i \in \mathcal{E}_0$  de modo que el ángulo entre el eje de  $R_{y_i}$  y un punto cualquiera de  $C_i$ , distinto de 0, sea menor que  $\delta$ . De esta forma tenemos asegurado que  $B_{x_0} \subset \bigcup 5R_{y_i}$ .

Dividimos la familia  $\mathfrak{C} = \{C_i\}$  en  $c_n \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{n-1}$  subfamilias,  $\mathfrak{C}^m$ , disjuntas, tales que, si  $C_i, C_j \in \mathfrak{C}^m$  y  $C_i \neq C_j$ , entonces el ángulo entre dos puntos cualesquiera, uno de  $C_i$  y otro de  $C_j$  sea mayor que  $12\delta/\sigma$ . Como ya observamos arriba,

$$\sum_m \omega\left(\bigcup_{C_i \in \mathfrak{C}^m} 5R_{y_i}\right) \geq \omega(\bigcup 5R_{y_i}) \geq \omega(B_{x_0}),$$

y por tanto alguna de las subfamilias,  $\mathfrak{C}^{m_0}$ , verifica,

$$\omega\left(\bigcup_{C_i \in \mathfrak{C}^{m_0}} 5R_{y_i}\right) \geq c_n \omega(B_{x_0}) \sigma^{n-1}.$$

Definimos  $\mathcal{E} = \{y_i : C_i \in \mathfrak{C}^{m_0}\}$ , que cumple las propiedades (3) y (4). Ahora tenemos que comprobar (2). En primer lugar, de (1) y (4) se deduce que

$$\begin{aligned} \omega\left(\bigcup_{y \in \mathcal{E}} 5R_y\right) &= \omega\left(\bigcup_{C_i \in \mathfrak{C}^{m_0}} 5R_{y_i}\right) \\ &\geq c_n \omega(B_{x_0}) \sigma^{n-1} \geq c_n \sigma^n \delta^{n-1} \frac{\omega(\{y : \mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma\})}{|A|}. \end{aligned}$$

Si  $y, z$  son dos puntos distintos de  $\mathcal{E}$ , de (3) se deduce que  $R_y \cap R_z \subset B_{\sigma/3}(x_0)$ .

Además,  $|R_y \cap A \cap B_{\sigma/3}(x_0)| \leq |R_y \cap B_{\sigma/3}(x_0)| \leq \frac{2\sigma}{3}|R_y| < \frac{2}{3}|R_y \cap A|$ . Por tanto,

$$\begin{aligned}
\omega\left(\bigcup_{\mathcal{E}} 5R_y\right) &\leq \sum_{y \in \mathcal{E}} \omega(5R_y) \\
&= \sum \left( \frac{1}{|5R_y|} \int_{5R_y} \omega \right) 5^n |R_y| \\
&\leq c_n \sum |R_y| \left( \inf_{R_y} \mathcal{K}_\delta \omega \right) \\
&\leq c_n \sum \frac{|R_y \cap A|}{\sigma} \left( \inf_{R_y} \mathcal{K}_\delta \omega \right) \\
&\leq c_n \sum \frac{|R_y \cap A \setminus B_{\sigma/3}(x_0)|}{\sigma} \left( \inf_{R_y} \mathcal{K}_\delta \omega \right) \\
&\leq \sum \frac{c_n}{\sigma} \mathcal{K}_\delta \omega(R_y \cap A \setminus B_{\sigma/3}(x_0)) \\
&\leq \frac{c_n}{\sigma} \mathcal{K}_\delta \omega(B \cap A).
\end{aligned}$$

### OBSERVACIÓN 3.3

*En realidad hemos probado algo más fuerte que lo anunciado; es decir*

$$\omega(\{y : \mathcal{M}_\delta(\chi_A)(y) > \sigma\}) \leq C_n \sigma^{-\frac{n+1}{2}} \delta^{-\frac{n-1}{2}} \mathcal{M}_\delta^5(A),$$

para todo conjunto medible  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma > 0$  y  $0 < \delta < 1/2$ .

### DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.1:

En primer lugar probaremos una desigualdad análoga a la del teorema 3.2 para  $\mathcal{K}_\delta$ . Después usaremos un teorema de interpolación para obtener el teorema 3.1.

El argumento que vamos a emplear se debe a A. Córdoba [Co1]. La versión que damos aquí es una adaptación de la de [M-So]. Sea  $\mathfrak{B}^{\delta,k}$  el conjunto de todos los rectángulos de excentricidad  $\delta$  y longitud  $a$ , con  $a \in \mathbb{N}$  y  $\delta^{-k} \leq a < \delta^{-k-1}$ . Notemos que si  $R_1 \in \mathfrak{B}^{\delta,k}$  y  $R_2 \in \mathfrak{B}^{\delta,l}$  con  $l \geq k+2$  y  $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ , entonces  $R_1 \subset 3R_2$ .

Definimos

$$\mathfrak{D} = \left\{ R \in \mathfrak{B}^\delta, \frac{|R \cap A|}{|A|} > \sigma \right\}$$

Basta probar que cualquier subconjunto finito  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  cumple,

$$\omega\left(\bigcup_{\mathcal{D}'} R\right) \leq C_n \sigma^{-\frac{n+1}{2}} \delta^{-\frac{n-1}{2}} \mathcal{K}_\delta \omega(A).$$

Consideramos  $\mathcal{D}'_i = \mathcal{D}' \cap \left(\bigcup_{k \text{ impar}} \mathfrak{B}^{\delta,k}\right)$  y  $\mathcal{D}'_p = \mathcal{D}' \cap \left(\bigcup_{k \text{ par}} \mathfrak{B}^{\delta,k}\right)$ . Mostraremos que

$$\omega\left(\bigcup_{\mathcal{D}'_i} R\right) \leq C_n \sigma^{-\frac{n+1}{2}} \delta^{-\frac{n-1}{2}} \mathcal{K}_\delta \omega(A).$$

Lo mismo puede ser probado para  $\mathcal{D}'_d$ .

Sea  $\kappa = \sup\{k : \mathcal{D}'_i \cap \mathfrak{B}^{\delta,k} \neq \emptyset\}$ . Definimos  $\mathcal{D}_\kappa = \mathcal{D}'_i \cap \mathfrak{B}^{\delta,\kappa}$ . Por inducción, si  $\mathcal{D}_\kappa, \mathcal{D}_{\kappa-1}, \dots, \mathcal{D}_{t+1}$  han sido definidos, elegimos

$$\mathcal{D}_t = \left\{ R \in \mathcal{D}'_i \cap \mathfrak{B}^{\delta,t} / R \cap \left(\bigcup_{\mathcal{D}_\kappa \cup \mathcal{D}_{\kappa-1} \cup \dots \cup \mathcal{D}_{t+1}} R'\right) = \emptyset \right\}.$$

Notemos que  $\bigcup_{\mathcal{D}'_i} R \subset \bigcup_t \left(\bigcup_{\mathcal{D}_t} 3R'\right)$ . Además, si llamamos  $A_t = A \cap \left(\bigcup_{\mathcal{D}_t} R\right)$ , entonces

$$\sigma < \frac{|R \cap A_t|}{|R|} \leq 3^n \frac{|3R \cap A_t|}{|3R|}, \quad \text{para todo } R \in \mathcal{D}_t.$$

Aplicando el teorema 3.2, resulta

$$\begin{aligned} \omega\left(\bigcup_{\mathcal{D}'_i} R\right) &\leq \sum_t \omega\left(\bigcup_{\mathcal{D}_t} 3R\right) \\ &\leq \sum_t \omega(\{y : \sup\{\mathcal{M}_\delta^{3 \cdot 2^k}(\chi_{A_t})(y) : \log_2 \frac{1}{\delta^t} \leq k \leq \log_2 \frac{1}{\delta^{t+1}} + 1\} > c_n \sigma\}) \\ &\leq \sum_t \sum_{[\log_2 \delta^{-t}]}^{[\log_2 \delta^{-t-1}+1]} \omega(\{y : \mathcal{M}_\delta^{3 \cdot 2^k}(\chi_{A_t})(y) > c_n \sigma\}) \\ &\leq c_n \sum_t \log \frac{1}{\delta} \sigma^{-\frac{n+1}{2}} \delta^{-\frac{n-1}{2}} \mathcal{K}_\delta \omega(A_t) \\ &\leq c_n \log \frac{1}{\delta} \sigma^{-\frac{n+1}{2}} \delta^{-\frac{n-1}{2}} \mathcal{K}_\delta \omega(A). \end{aligned}$$

Hemos probado de  $\mathcal{K}_\delta$  es de tipo débil restringido  $\frac{n+1}{2}$ , con el par de pesos  $(\omega, \mathcal{K}_\delta \omega)$  y una constante  $O\left(\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{\frac{2}{n+1}} \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{n-1}{n+1}}\right)$ . Por otro lado

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\delta : L^\infty(\mathcal{K}_\delta \omega) &\longrightarrow L^\infty(\omega) \quad \text{con constante } O(1) \\ \mathcal{K}_\delta : L^1(\mathcal{K}_\delta \omega) &\longrightarrow L^{1,\infty}(\omega) \quad \text{con constante } O\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^{n-1}\right)\end{aligned}$$

Las hipótesis son las necesarias para poder utilizar el siguiente teorema de interpolación.

**Teorema 3.4** (A. Carbery, E. Hernández, F. Soria [C-H-S])

Sean  $1 \leq q < p$  y  $T$  un operador sublineal tales que

$$\begin{aligned}T : L^\infty &\longrightarrow L^\infty \quad \text{con constante } O(1) \\ T : L^q &\longrightarrow L^{q,\infty} \quad \text{con constante } O(N) \\ T : L^{p,1} &\longrightarrow L^{p,\infty} \quad \text{con constante } O(1)\end{aligned}$$

Entonces,

$$T : L^p \longrightarrow L^p \quad \text{con constante } O(\log N).$$

(Para nosotros, la notación  $T : X \rightarrow Y$ , donde  $X$  e  $Y$  son dos espacios cuasinormados, quiere decir  $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ .)

Aplicaremos el teorema a

$$T = \frac{1}{\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{\frac{2}{n+1}} \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{n-1}{n+1}}} \mathcal{K}_\delta,$$

con  $q = 1$ ,  $p = \frac{n+1}{2}$  y  $N = \delta^{-\frac{n(n-1)}{n+1}}$ . Resulta entonces que,

$$\mathcal{K}_\delta : L^{\frac{n+1}{2}}(\mathcal{K}_\delta \omega) \longrightarrow L^{\frac{n+1}{2}}(\omega) \quad \text{con constante } O\left(\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{\frac{2}{n+1}+1} \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{n-1}{n+1}}\right).$$

El resto de los casos, es decir,  $1 < p < \frac{n+1}{2}$ , se obtiene usando el teorema de Marcinkiewicz para interpolar entre la estimación anterior y la desigualdad  $\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^{1,\infty}(\omega)} \leq C_n \left(\frac{1}{\delta}\right)^{n-1} \|f\|_{L^1(\mathcal{K}_\delta \omega)}$ . •



## CAPÍTULO 4

### EL OPERADOR MAXIMAL SOBRE UN CONJUNTO DE CANTOR DE DIRECCIONES

#### §1. INTRODUCCIÓN: OPERADORES MAXIMALES SOBRE DIRECCIONES. TEOREMAS PARA EL CONJUNTO DE CANTOR

Dado  $\Sigma$ , un conjunto de vectores unitarios de  $\mathbb{R}^2$ , se define el operador maximal sobre las direcciones de  $\Sigma$ ,

$$\mathcal{M}_{\Sigma}f(x) = \sup_{\substack{v \in \Sigma \\ s > 0}} \frac{1}{2s} \int_{-s}^s |f(x - tv)| dt, \quad \text{para } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

Observemos que si  $f$  es una función del espacio  $L^1_{\text{loc}}$ ,  $\int |f(x - tv)| dt$  podría no estar bien definida, puesto que  $\{tv : t \in \mathbb{R}\}$  es un subconjunto de medida 0 de  $\mathbb{R}^2$ . Así pues, en principio se define  $\mathcal{M}_{\Sigma}f$  sólo para funciones de la clase de Schwarz. Si se prueba que para estas funciones se verifica una desigualdad de la forma  $\|\mathcal{M}_{\Sigma}f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$ , entonces se podrá extender  $\mathcal{M}_{\Sigma}$  a todo  $L^p$  por densidad. Notemos que si  $\Sigma$  es finito, desigualdades de esta forma son consecuencia de la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood unidimensional.

La acotación en  $L^p$  (fuerte), para  $1 < p < \infty$ , de este operador es equivalente a la de

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\Sigma}f(x) = \sup_{v \in \Sigma} \frac{1}{|R_{v,x}|} \int_{R_{v,x}} |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los rectángulos  $R_{v,x}$  cuyo lado más largo es paralelo a  $v \in \Sigma$  y que contienen a  $x$ . El comportamiento de  $\widehat{\mathcal{M}}_{\Sigma}$  determina las propiedades de diferenciación de la base formada por todos esos rectángulos. En otro contexto, la acotación en  $L^p$  del operador implica la acotación en  $L^{2p'}$

de un cierto operador multiplicador y también ‘desigualdades de Littlewood–Paley angulares’ (véase [C–F1]).

En general,  $\mathfrak{M}_\Sigma$  está acotado en  $L^\infty$  con constante 1 y es de tipo débil (1,1) con constante menor o igual que  $N$  si  $\Sigma$  tiene  $N$  elementos. Resultados mucho mejores se conocen en algunos casos particulares:

Se dice que  $\Sigma$  es un conjunto lacunar si

$$\Sigma = \{v(j) = (v_1(j), v_2(j))\}_{j=1}^\infty$$

con  $0 \leq \frac{v_2(j+1)}{v_1(j+1)} \leq \lambda \frac{v_2(j)}{v_1(j)}$  para algún  $0 < \lambda < 1$ , y todo  $j$ .

Si  $\Sigma$  es un conjunto lacunar, entonces  $\mathfrak{M}_\Sigma$  está acotado en  $L^p$  para  $1 < p \leq \infty$ , a pesar de que  $\Sigma$  tiene infinitos elementos. Por lo que sabemos, el primer resultado sobre direcciones lacunares se debe a J. O. Strömberg [St1]. Posteriormente, A. Córdoba y R. Fefferman [C–F2] probaron que  $\mathfrak{M}_\Sigma$  es de tipo débil (2,2). Por último A. Nagel, E. M. Stein y S. Wainger [N–S–W] demostraron el teorema  $L^p$  completo.

El otro caso bien estudiado es el de un conjunto de direcciones uniformemente distribuidas,

$$\Sigma = \Sigma_N = \left\{ \left( \cos \frac{2\pi j}{N}, \sin \frac{2\pi j}{N} \right) : j = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

A. Córdoba [Co2] probó que

$$\|\mathfrak{M}_{\Sigma_N} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C(1 + \log N)^4 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \quad \text{para toda } f \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

El mejor resultado,

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{M}_{\Sigma_N} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq C(1 + \log N) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ \|\mathfrak{M}_{\Sigma_N} f\|_{L^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)} &\leq C(1 + \log N)^{1/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned}$$

fue probado por Strömberg [St2].

El operador maximal sobre  $N$  direcciones uniformemente distribuidas mayor a puntualmente (salvo una constante) al operador maximal de Keakeya de excentricidad  $\frac{1}{N}$ :

$$\mathcal{K}_{1/N} f(x) \leq C \mathfrak{M}_{\Sigma_N} f(x) \quad \text{para toda } f \in L^1_{\text{loc}}, \text{ y para todo } x,$$

de modo que las estimaciones probadas por Strömberg son igualmente ciertas para  $\mathcal{K}_{1/N}$ .

El operador maximal universal,  $\mathfrak{M}_{S^1}$ , donde  $S^1$  es la esfera unidad de  $\mathbb{R}^2$ , no está acotado en  $L^p$  salvo si  $p = \infty$ .

El caso uniformemente distribuido parece ser el peor. Se conjetura que existen constantes  $C, \beta > 0$  tales que, para cualquier  $N$  y cualquier conjunto  $\Sigma$  de  $N$  elementos se verifica,

$$\|\mathfrak{M}_{\Sigma} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C(1 + \log N)^{\beta} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

En dimensiones superiores a 2, también se define el operador maximal sobre  $N^{n-1}$  direcciones de forma análoga. Se espera que esté acotado en  $L^p$  con constantes

$$\begin{aligned} C_{n,p} N^{\frac{n}{p}-1} (\log N)^{\beta_n} & \quad \text{si } p \leq n, \\ C_n (\log N)^{\beta_n} & \quad \text{si } p > n, \end{aligned}$$

que son semejantes a las conjeturadas para el operador de Kakeya. (También, como en dimensión 2, el operador sobre  $N^{n-1}$  direcciones uniformemente distribuidas es más grande que el maximal de Kakeya  $\mathcal{K}_{1/N}$ .) A. Carbery, E. Hernández y F. Soria [C-H-S] probaron que estas constantes son correctas en  $L^p_{\text{rad}}$ , que es el subespacio de  $L^p$  formado por las funciones radiales.

Volvamos al problema en dimensión 2. S. Wainger [W] propuso el estudio de un operador más pequeño

$$\mathfrak{M}_{\Sigma}^0 f(x) = \sup_{v \in \Sigma} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |f(x - tv)| dt.$$

Demostró, utilizando la transformada de Fourier,

**Teorema previo 4.1** (S. Wainger [W])

*Existe una constante  $C > 0$  tal que, para cualquier conjunto  $\Sigma$  de  $N$  elementos se cumple*

$$\|\mathfrak{M}_{\Sigma}^0 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C(1 + \log N) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

En este capítulo queremos iniciar el estudio de un caso particular de este tipo de operadores. Sea  $\mathcal{C}$  el conjunto de Cantor

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} : a_k \in \{0, 2\}, k = 1, 2, \dots \right\}.$$

El operador que nos interesa es el asociado al conjunto formado por los vectores unitarios cuya pendiente pertenece a  $\mathcal{C}$ , al que denotamos  $\mathfrak{C}$ .

$$\mathfrak{C} = \left\{ v = (v_1, v_2) / |v| = 1, v_1 > 0, \frac{v_2}{v_1} \in \mathcal{C} \right\}.$$

Se ha conjeturado que

$$\|\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}^0 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Por otra parte, es condición necesaria para que  $\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}^0$  esté acotado en  $L^p$  que  $p \geq 1 + \frac{\log 2}{\log 3}$ .

Consideremos una familia de subconjuntos sencillos de  $\mathbb{R}$  que se aproxima al conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0 &= [0, 1] \\ \mathcal{B}_1 &= \left[1, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ \mathcal{B}_2 &= \left[1, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\ &\dots \\ \mathcal{B}_N &= \frac{1}{3}\mathcal{B}_{N-1} \cup \left(1 - \frac{1}{3}\mathcal{B}_{N-1}\right), \end{aligned}$$

(La notación que utilizamos es diferente a la de los capítulos anteriores. Aquí, si  $\eta \in \mathbb{R}$  y  $\mathcal{U}$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,

$$\eta\mathcal{U} = \{\eta q : q \in \mathcal{U}\}, \quad 1 - \mathcal{U} = \{1 - q : q \in \mathcal{U}\}.)$$

$\mathcal{B}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  resulta al quitar los tercios centrales de los intervalos que forman  $\mathcal{B}_{k-1}$ . Es el  $k$ -ésimo paso en la construcción del conjunto de Cantor,  $\mathcal{C} = \bigcap \mathcal{B}_k$ .

Definimos  $\mathcal{A}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  como el conjunto de los extremos de las  $2^k$  componentes conexas de  $\mathcal{B}_k$ , es decir,  $\mathcal{A}_k = \partial\mathcal{B}_k$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= \{0, 1\} \\ \mathcal{A}_1 &= \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\} \\ \mathcal{A}_2 &= \left\{0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1\right\} \\ &\dots \\ \mathcal{A}_k &= \left\{\frac{p}{3} : p \in \mathcal{A}_{k-1}\right\} \cup \left\{1 - \frac{p}{3} : p \in \mathcal{A}_{k-1}\right\}. \end{aligned}$$

Trabajaremos con la familia de los operadores asociados a las direcciones cuya pendiente pertenece a  $\mathcal{A}_k$ . Denotamos,

$$\mathfrak{A}_k = \left\{ v = (v_1, v_2) / |v| = 1, v_1 > 0, \frac{v_2}{v_1} \in \mathcal{A}_k \right\},$$

y  $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}_k}^0$  son los correspondientes operadores.

La relación entre  $\{\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}_k}^0\}_k$  y  $\mathfrak{M}_{\mathcal{C}}^0$  es clara. Notemos que  $\cup \mathfrak{A}_k$  es densa en el conjunto  $\mathcal{C}$ . Además, como  $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \dots$  la sucesión  $\{\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}_k}^0\}$  es creciente, en el sentido de que  $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}_k}^0 f(x) \leq \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}_{k+1}}^0 f(x)$  para toda  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  y todo  $x \in \mathbb{R}^2$ . De estas dos observaciones se deduce que

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}_k}^0 f(x) \nearrow \mathfrak{M}_{\mathcal{C}}^0 f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2, \text{ y toda } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

La idea de lo que hay que hacer es evidente. Para probar la acotación de  $\mathfrak{M}_{\mathcal{C}}^0$  basta demostrar que los operadores  $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}_k}^0$  están uniformemente acotados. Notemos que  $\mathfrak{A}_k$  tiene  $2^{k+1}$  elementos, de modo que el teorema 4.1 nos dice que  $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}_k}^0$  está acotado en  $L^2$  con una constante menor o igual que  $C(N+1)$ ; esto no implica nada sobre  $\mathfrak{M}_{\mathcal{C}}^0$ . Siguiendo las ideas de S. Wainger hemos probado dos resultados: el segundo de ellos muestra que la constante de acotación de  $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}_k}^0$  puede ser mejorada, aunque aún no es lo bastante buena como para que podamos obtener información sobre el comportamiento de  $\mathfrak{M}_{\mathcal{C}}^0$  en  $L^2$ . El primero prueba que se puede definir  $\mathfrak{M}_{\mathcal{C}}^0$  sobre el conjunto de todas las funciones  $f \in L^2$  tales que  $|f|^\wedge$  tiene su soporte en una banda vertical de  $\mathbb{R}^2$  o sobre aquellas en las que  $|f|$  tiene una mínima regularidad.

#### Teorema 4.2

- a) Existe una constante  $C > 0$  tal que, para todo  $q \geq 1$  y toda  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $f \geq 0$ , tal que  $\text{sop } \hat{f} \subset \{(\xi_1, \xi_2), |\xi^2| \leq 3^q\}$ , se verifica

$$\|\mathfrak{M}_{\mathcal{C}}^0 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \sqrt{q} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

- b) Si  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $f \geq 0$  y  $\int |\hat{f}(\xi)|^2 [1 + (\log^+ |\xi_2|)(\log^+ \log^+ |\xi_2|)^{1+\epsilon}] d\xi_2 < \infty$ , con algún  $\epsilon > 0$ , entonces,

$$\|\mathfrak{M}_{\mathcal{C}}^0 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_\epsilon \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\xi)|^2 \left[ 1 + (\log^+ |\xi_2|)(\log^+ \log^+ |\xi_2|)^{1+\epsilon} \right] d\xi_2 \right)^{1/2},$$

donde  $C_\epsilon$  no depende de  $f$ .

#### Teorema 4.3

Existe una constante  $C$  tal que, para todo  $N \in \mathbb{N}$  y toda  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ,

$$\|\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}_N}^0 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \sqrt{N+1} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

## §2. DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS

Podemos suponer que  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  y que  $f \geq 0$ . Tomemos  $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , tal que,  $\hat{\Phi} \in C_0^\infty([-1/2, 1/2])$ ,  $\Phi \geq 0$  y  $\Phi(x) > 0$  para todo  $x \in [-1, 1]$ . Definimos nuevos operadores que son versiones suaves de  $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}_k}$ . Primero, para  $p \in \cup \mathfrak{A}_i$ ,

$$\mathbf{M}_p f(x^1, x^2) = \mathbf{M}_p^\Phi f(x^1, x^2) = \int \Phi(t) f(x^1 - t, x^2 - tp) dt,$$

y después los operadores maximales correspondientes,

$$\mathcal{M}_k f(x^1, x^2) = \mathcal{M}_k^\Phi f(x^1, x^2) = \max_{p \in \mathfrak{A}_k} \mathbf{M}_p f(x^1, x^2).$$

Observemos que, por las condiciones que imponemos sobre  $\Phi$ , se verifica

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}_k}^0 f(x) \leq C(\Phi) \mathcal{M}_k f(x).$$

Como es habitual en el estudio de operadores maximales, no trabajaremos con  $\mathcal{M}_k$ , sino con operadores lineales. Para cada función medible  $p_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathfrak{A}_k$ , se define

$$\mathcal{I}_{p_k} f(x^1, x^2) = (\mathbf{M}_{p_k(x^1, x^2)} f)(x^1, x^2).$$

Dividimos la función  $f$  rompiendo en bandas su transformada de Fourier:

$$f = \sum_{l=0}^{\infty} f_l \quad \text{con} \quad \hat{f}_l(\xi_1, \xi_2) = \beta_l(\xi_1, \xi_2) \hat{f}(\xi_1, \xi_2),$$

donde hemos elegido una sucesión de funciones  $\{\beta_l\}_l$  con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \beta_l \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \quad 0 \leq \beta_l \leq 1, \quad \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \equiv 1, \quad \text{sop} \beta_0 \subset \{|\xi_2| \leq 9\} \\ \text{sop} \beta_l \subset \{3^l < |\xi_2| \leq 3^{l+2}\} \quad \text{si } l = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Definimos también, para cada  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\hat{f}_N^N = \beta_N^N \hat{f}, \quad \text{donde} \quad \beta_N^N = 1 - \sum_{l=0}^{N-1} \beta_l.$$

Los teoremas son consecuencia del siguiente lema:

**Lema 4.4**

- (1)  $\|\mathcal{T}_{pN} f_l\|_2 \leq C(\Phi) \|f_l\|_2$  para todo  $N \in \mathbb{N}$  y  $l = 0, 1, \dots, N-1$ .  
(2)  $\|\mathcal{T}_{pN} f_N^N\|_2 \leq C(\Phi) \|f_N^N\|_2$  para todo  $N \geq 0$ .

Antes de probar el lema, indiquemos como se obtienen a partir de él los teoremas.

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.2:**

- a) Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ,  $f \geq 0$ , y  $\text{sop } \hat{f} \subset \{|\xi_2| \leq 3^q\}$ , podemos escribir, utilizando la notación anterior,  $f = \sum_{l=0}^{q-1} f_l$ . Sumando las estimaciones del lema 4.4 (1), resulta,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{pN} f\|_2^2 &= \int \left| \sum_{l=0}^{q-1} \mathcal{T}_{pN} f_l \right|^2 \\ &\leq q \int \sum_{l=0}^{q-1} |\mathcal{T}_{pN} f_l|^2 \quad \text{usando la desigualdad de} \\ &\quad \text{Cauchy-Schwarz} \\ &\leq q C(\Phi)^2 \sum_{l=0}^{q-1} \|f_l\|_2^2 \\ &= q C(\Phi)^2 \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

para todo  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq q$ . De aquí deducimos que

$$\|\mathfrak{M}_{\alpha_N}^0 f\|_2 \leq C \|\mathcal{M}_N f\|_2 \leq C(\Phi) \sqrt{q} \|f\|_2,$$

y haciendo  $N \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\|\mathfrak{M}_{\mathbf{e}}^0 f\|_2 \leq C \sqrt{q} \|f\|_2.$$

- b) Sea  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ,  $f \geq 0$ . Escribimos  $f = \sum_{l=0}^{N-1} f_l + f_N^N$ . Aplicando el lema 4.4,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{pN} f\|_2^2 &\leq \int \left| \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{T}_{pN} f_l + \mathcal{T}_{pN} f_N^N \right|^2 \\ &\leq 2 \int \left| \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{T}_{pN} f_l \right|^2 + 2 \int |\mathcal{T}_{pN} f_N^N|^2 \end{aligned}$$

que, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, está mayorado por

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \int \left[ \sum_{l=0}^{N-1} |\mathcal{T}_{p_N} f_l|^2 (l+2) \log^{1+\epsilon}(l+2) \right] \left[ \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{(l+2) \log^{1+\epsilon}(l+2)} \right] + \\
&\quad 2 \int |\mathcal{T}_{p_N} f_N^N|^2, \\
&\leq C_\epsilon \int \sum_{l=0}^{N-1} |\mathcal{T}_{p_N} f_l|^2 (l+2) \log^{1+\epsilon}(l+2) + 2 \int |\mathcal{T}_{p_N} f_N^N|^2 \\
&\leq C_\epsilon C(\Phi) \int \sum_{l=0}^{N-1} |f_l|^2 (l+2) \log^{1+\epsilon}(l+2) + C(\Phi) \int |f_N^N|^2 \\
&= C_\epsilon C(\Phi) \int \sum_{l=0}^{N-1} |\hat{f}_l|^2 (l+2) \log^{1+\epsilon}(l+2) + C(\Phi) \int |\hat{f}_N^N|^2 \\
&\leq C_\epsilon C(\Phi) \int |\hat{f}|^2 (2 + \log^+ |\xi_2|) (\log^+ \log^+ (2 + |\xi_2|))^{1+\epsilon} d\xi_2
\end{aligned}$$

que es 4.2 b).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.3:

Escribimos  $f = \sum_{l=0}^{N-1} f_l + f_N^N$  y aplicamos el lema 4.4:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_{p_N} f\|_2^2 &= \int \left| \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{T}_{p_N} f_l + \mathcal{T}_{p_N} f_N^N \right|^2 \\
&\leq (N+1) \int \left[ \sum_{l=0}^{N-1} |\mathcal{T}_{p_N} f_l|^2 + |\mathcal{T}_{p_N} f_N^N|^2 \right] \\
&\leq (N+1) C(\Phi)^2 \left[ \sum_{l=0}^{N-1} \|f_l\|_2^2 + \|f_N^N\|_2^2 \right] \\
&= (N+1) C(\Phi)^2 \|f\|_2^2
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4.4:

Fijemos  $N$  y una función  $p_N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{A}_N$  medible. Para simplificar la notación llamaremos  $\mathcal{T}_N$  a  $\mathcal{T}_{p_N}$ . Elegimos funciones  $p_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{A}_k$ ,  $k = N-1, N-2, \dots, 0$  (que dependen de  $p_N$  pero no lo indicamos para no recargar la notación) por recurrencia:



Si  $p_k(x^1, x^2) \in \mathcal{A}_{k-1}$ , entonces  $p_{k-1}(x^1, x^2) = p_k(x^1, x^2)$ .

Si  $p_k(x^1, x^2) \notin \mathcal{A}_{k-1}$ , tomamos el único punto  $p_{k-1}(x^1, x^2) \in \mathcal{A}_{k-1}/\mathcal{A}_{k-2}$  que satisface  $|p_k(x^1, x^2) - p_{k-1}(x^1, x^2)| = \min\{|p_k(x^1, x^2) - q| : q \in \mathcal{A}_{k-1}/\mathcal{A}_{k-2}\}$ . Cambiamos el nombre  $T_{p_k}$  por  $T_k$ . Para  $l < N$  escribimos

$$\|T_N f_l\|_2 \leq \sum_{k=l+1}^N \|T_k f_l - T_{k-1} f_l\|_2 + \|T_l f_l\|_2 = I + II.$$

La parte  $II$  y  $\|T_N f_N^N\|_2$  son fáciles de manejar. Para ver esto, sustituimos  $T_l f_l$  o  $T_N f_N^N$  por una función cuadrado mayor,

$$|T_l f_l(x^1, x^2)| \leq \left[ \sum_{p \in \mathcal{A}_l} |M_p f_l(x^1, x^2)|^2 \right]^{1/2}$$

$$|T_N f_N^N(x^1, x^2)| \leq \left[ \sum_{p \in \mathcal{A}_N} |M_p f_N^N(x^1, x^2)|^2 \right]^{1/2}.$$

Calculamos la norma  $L^2$  con la fórmula de Plancherel:

$$\|T_l f_l\|_2^2 \leq \int \sum_{p \in \mathcal{A}_l} |M_p f_l(x^1, x^2)|^2 = \int \sum_{p \in \mathcal{A}_l} |\hat{\Phi}(\xi_1 + p\xi_2)|^2 |\hat{f}_l(\xi_1, \xi_2)|^2 d\xi_1 d\xi_2$$

$$\|T_N f_N^N\|_2^2 \leq \int \sum_{p \in \mathcal{A}_N} |M_p f_N^N(x^1, x^2)|^2 = \int \sum_{p \in \mathcal{A}_N} |\hat{\Phi}(\xi_1 + p\xi_2)|^2 |\hat{f}_N^N(\xi_1, \xi_2)|^2 d\xi_1 d\xi_2.$$

Para acotar las dos integrales anteriores, hay que estimar  $\sum_{p \in \mathcal{A}_j} |\hat{\Phi}(\xi_1 + p\xi_2)|^2$  cuando  $(\xi_1, \xi_2) \in \text{sop } \hat{f}_j \cup \text{sop } \hat{f}_j^j$ . Si  $j > 0$  y  $|\xi_2| > 3^j$ , existe, como mucho, un punto  $p \in \mathcal{A}_j$  tal que  $\xi_1 + p\xi_2 \in \text{sop } \hat{\Phi}$  (ya que si  $p, q \in \mathcal{A}_j$ , son distintos y  $\xi_1 + p\xi_2 \in \text{sop } \hat{\Phi}$ , entonces  $|\xi_1 + p\xi_2 - \xi_1 - q\xi_2| = |p - q||\xi_2| > 3^{-j}3^j = 1 \geq \text{diam}(\text{sop } \hat{\Phi})$ , de modo que,  $\xi_1 + q\xi_2 \notin \text{sop } \hat{\Phi}$ ). Por lo tanto, si  $j > 0$ ,  $\sum_{p \in \mathcal{A}_j} |\hat{\Phi}(\xi_1 + p\xi_2)|^2 \leq \|\hat{\Phi}\|_\infty^2$ , en  $\text{sop } \hat{f}_j$  y  $\text{sop } \hat{f}_j^j$ .

Por otra parte,  $\mathcal{A}_0$  tiene sólo dos elementos, de manera que podemos acotar  $\sum_{p \in \mathcal{A}_0} |\hat{\Phi}(\xi_1 + p\xi_2)|^2 \leq 2\|\hat{\Phi}\|_\infty^2$ , en  $\text{sop } \hat{f}_0$  y  $\text{sop } \hat{f}_0^0$ . Por lo tanto,

$$\|T_l f_l\|_2^2 \leq 2\|\hat{\Phi}\|_\infty^2 \|f_l\|_2^2 \quad \text{para todo } l \geq 0,$$

$$\|T_N f_N^N\|_2^2 \leq 2\|\hat{\Phi}\|_\infty^2 \|f_N^N\|_2^2 \quad \text{para todo } N \geq 0.$$

La parte *I* necesita un estudio más cuidadoso. También hacemos una mayoración trivial. Para ello definimos

$$\mathcal{D}_k = \{(p, q) : p \in \mathcal{A}_k \setminus \mathcal{A}_{k-1}, q \in \mathcal{A}_{k-1} \setminus \mathcal{A}_{k-2}, |p - q| = \frac{1}{3^k}, \frac{2}{3^k}\}.$$

Entonces, por la construcción de las funciones  $p_k$  se cumple

$$|T_k f_l(x^1, x^2) - T_{k-1} f_l(x^1, x^2)| \leq \left[ \sum_{(p, q) \in \mathcal{D}_k} |M_p f_l(x^1, x^2) - M_q f_l(x^1, x^2)|^2 \right]^{1/2}.$$

Del mismo modo que en la parte *II*, utilizamos aquí de nuevo la igualdad de Plancherel:

$$\begin{aligned} \|T_k f_l - T_{k-1} f_l\|_2^2 &\leq \int \sum_{(p, q) \in \mathcal{D}_k} |M_p f_l(x^1, x^2) - M_q f_l(x^1, x^2)|^2 dx^1 dx^2 \\ &= \int \sum_{\mathcal{D}_k} |\hat{\Phi}(\xi_1 + p\xi_2) - \hat{\Phi}(\xi_1 + q\xi_2)|^2 |\hat{f}_l(\xi_1, \xi_2)|^2 d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

Así pues, nos vemos obligados a estudiar la función

$$\psi_k(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\mathcal{D}_k} |\hat{\Phi}(\xi_1 + p\xi_2) - \hat{\Phi}(\xi_1 + q\xi_2)|^2.$$

El problema se reduce a acotar correctamente la norma de  $\psi_k$  en  $L^\infty$ . Probaremos que

$$\|\psi_k\|_{L^\infty(\text{sop } \beta_l)} \leq C'(\Phi) \left(\frac{2}{9}\right)^{(k-l)} \quad \text{si } k > l,$$

con lo que habremos concluido la prueba del lema.

Esta es la parte de la prueba en que es esencial la especial distribución de los puntos de  $\mathcal{A}_k$ . Usando el teorema fundamental del cálculo podemos escribir  $\psi_k$  de una manera que nos permite aprovechar la geometría de  $\mathcal{B}_k$ .

$$\begin{aligned} \psi_k(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{\mathcal{D}_k} |\hat{\Phi}(\xi_1 + p\xi_2) - \hat{\Phi}(\xi_1 + q\xi_2)|^2 \\ &= \sum_{\mathcal{D}_k} \left| \int_{q\xi_2}^{p\xi_2} \hat{\Phi}'(\xi_1 + t) dt \right|^2. \end{aligned}$$

Estimaremos el último término contando el número de sumandos y acotándolos uniformemente. Si  $p \in \mathcal{A}_k \setminus \mathcal{A}_{k-1}$  y  $q \in \mathcal{A}_{k-1} \setminus \mathcal{A}_{k-2}$ , con  $|p - q| = \frac{1}{3^k}, \frac{2}{3^k}$ , entonces

$p$  y  $q$  pertenecen a la misma componente conexa de  $\mathcal{B}_{k-1}$ , y además, en cada componente de  $\mathcal{B}_{k-1}$  hay dos puntos de  $\mathcal{A}_k \setminus \mathcal{A}_{k-1}$ , y uno de  $\mathcal{A}_{k-1} \setminus \mathcal{A}_{k-2}$ . Llamemos  $\mathcal{R}_k(\xi_1, \xi_2)$  al conjunto formado por las componentes conexas de  $\mathcal{B}_{k-1}$ ,  $L$ , tales que  $\xi_2 L \cap \text{sop} \hat{\Phi}(\xi_1 + \cdot) \neq \emptyset$ . Podemos acotar  $\psi_k(\xi_1, \xi_2)$ ,

$$\begin{aligned} \psi_k(\xi_1, \xi_2) &\leq 2(\#\mathcal{R}_k(\xi_1, \xi_2)) \left( \sup_{L \in \mathcal{R}_k(\xi_1, \xi_2)} \int_{\xi_2 L} |\hat{\Phi}'(\xi_1 + t)| dt \right)^2 \\ &\leq 2(\#\mathcal{R}_k(\xi_1, \xi_2)) \|\hat{\Phi}'\|_\infty^2 \sup_{L \in \mathcal{R}_k(\xi_1, \xi_2)} |\xi_2 L|^2 \\ &\leq 2(\#\mathcal{R}_k(\xi_1, \xi_2)) \|\hat{\Phi}'\|_\infty^2 |\xi_2|^2 3^{-2(k-1)}. \end{aligned}$$

Para terminar, tenemos que dar una buena cota superior para el cardinal de  $\mathcal{R}_k(\xi_1, \xi_2)$ , cuando  $(\xi_1, \xi_2) \in \text{sop} \beta_l$ ,  $l < k$ . Si  $(\xi_1, \xi_2) \in \text{sop} \beta_l$ ,  $l \geq 1$ , y si  $L, L'$  son dos componentes de  $\mathcal{B}_l$ , entonces, la distancia de  $\xi_2 L$  a  $\xi_2 L'$  es al menos  $|\xi_2| 3^{-l} > 1$ . Por lo tanto, hay a lo más una componente de  $\mathcal{B}_l$ ,  $L(l) = L(l, \xi_1, \xi_2)$ , tal que,  $\xi_2 L \cap \text{sop} \hat{\Phi}(\xi_1 + \cdot) \neq \emptyset$ . Lo mismo ocurre si  $l = 0$ , porque  $\mathcal{B}_0$  tiene una única componente.

Si  $k > l$ , sólo aquellas componentes de  $\mathcal{B}_{k-1}$  que sean subconjuntos de  $L(l)$  pueden ser elementos de  $\mathcal{R}_k(\xi_1, \xi_2)$ . Sólomente hay  $2^{k-1-l}$  de éstas, de manera que  $\#\mathcal{R}_k(\xi_1, \xi_2) \leq 2^{k-1-l}$ . En consecuencia, si  $k > l$  y  $(\xi_1, \xi_2) \in \text{sop} \beta_l$ ,

$$\begin{aligned} \psi_k(\xi_1, \xi_2) &\leq 22^{k-1-l} \|\hat{\Phi}'\|_\infty^2 |\xi_2|^2 3^{-2(k-1)} \leq 2^{k-l} \|\hat{\Phi}'\|_\infty^2 (3^{l+2})^2 3^{-2(k-1)} \\ &\leq 3^6 \|\hat{\Phi}'\|_\infty^2 \left(\frac{2}{9}\right)^{k-l} \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAFÍA

- [B-L] J. Bergh, J. Löfstrom, *Interpolation Spaces*, Grund. Math. Wiss. 223. Springer-Verlag, Berlin 1976.
- [B] J. Bourgain, *Besicovitch Type Maximal Functions and Applications to Fourier Analysis*, Geometric and Functional Analysis 1 (1991) .
- [C-Z1] A. P. Calderón, A. Zygmund, *On the Existence of Certain Singular Integrals*, Acta Mathematica 88 (1952), 85-139.
- [C-Z2] A. P. Calderón, A. Zygmund, *On Singular Integrals*, Amer. J. Math. 18 (1956), 289-309.
- [Ca] A. Carbery *A Weighted Inequality for the Maximal Bochner-Riesz Operator on  $\mathbb{R}^2$* , Trans. Amer. Math. Soc. 287 (1985), 673-680.
- [C-H-S] A. Carbery, E. Hernández, F. Soria, *Estimates for the Kakeya Maximal Operator on Radial Functions in  $\mathbb{R}^n$* , Proceedings ICM-90 Satellite Conference on Harmonic Analysis, Sendai, S. Igari. 1990, 41-50.
- [C-R-V] A. Carbery, J. L. Rubio de Francia, L. Vega *Almost Everywhere Summability of Fourier Integrals*, J. London Math. Soc. 38 (1988), 513-524.
- [C-S] A. Carbery, F. Soria, *Almost-Everywhere Convergence of Fourier Integrals for Functions in Sobolev Spaces, and an  $L^2$ -Localisation Principle*, Rev. Mat. Iberoamericana 4, (1988), 319-337.
- [C] M. Christ, *Weak Type (1,1) Bounds for Rough Operators*, Ann. Math. 128 (1988), 19-42.
- [C-D-R] M. Christ, J. Duoandikoetxea, J. L. Rubio de Francia, *Maximal Operator Related to the Radon Transform and the Calderon-Zygmund Method of Rotations*, Duke Math. Jour. 53 (1986), 189-209.
- [C-R] M. Christ, J. L. Rubio de Francia, *Weak-Type (1,1) Bounds for Rough Operators, II*, Invent. Math. 93 (1988), 225-237.

- [Co1] A. Córdoba, *The Keakeya Maximal Functions and the Spherical Summation Multipliers* Am. J. Math. 99 (1977), 1–22.
- [Co2] A. Córdoba, *The Multiplier Problem for the Polygon*, Annals of Math. 105 (1977) 581–588.
- [Co3] A. Córdoba, *A Note on Bochner–Riesz Operators*, Duke Math. Jour. 46 (1979), 505–511.
- [C–F1] A. Córdoba, R. Fefferman, *On the Equivalence Between the Boundedness of Certain Classes of Maximal and Multiplier Operators in Fourier Analysis*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 74 (1977), 423–425.
- [C–F2] A. Córdoba, R. Fefferman, *On Differentiation of Integrals*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 74 (1977), 2211–2213.
- [D–R] J. Duoandikoetxea, J. L. Rubio de Francia, *Maximal and Singular Integral Operators Via Fourier Transform*, Invent. Math 84 (1986), 541–561.
- [D1] J. Duoandikoetxea, *Análisis de Fourier*, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid 1991.
- [D2] J. Duoandikoetxea, *Weighted Norm Inequalities for Homogeneous Singular Integrals*, por aparecer en Trans. Amer. Math. Soc.
- [F1] C. Fefferman, *The multiplier Problem for the Ball*, Ann. Math. 94 (1972), 330–336.
- [F2] C. Fefferman, *A note on the Spherical Summation Multiplier* Israel J. Math. 15 (1973), 44–52.
- [F–S] C. Fefferman, E. M. Stein, *Some Maximal Inequalities*, Amer. J. Math. 93 (1971), 107–115.
- [G–R] J. García-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North Holland, Math. Studies 116, 1985.
- [H–L] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *A Maximal Theorem with Function–Theoretic Applications*, Acta Mathematica 54 (1930), 81–116.
- [H1] S. Hofmann, *Weak (1,1) Boundedness of Singular Integrals with Non-Smooth Kernels*, Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988), 260–264

- [H2] S. Hofmann, *Weighted Weak-Type (1,1) Inequalities for Rough Operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 107 (1989), 423-435.
- [H3] S. Hofmann, *Weighted Norm Inequalities and Vector-Valued Inequalities for Certain Rough Operators*, Preprint.
- [Hu] S. M. Hudson, *A Covering Lemma for Maximal Operators with Unbounded Kernels*, Michigan Math. J. 34 (1987), 147-151.
- [M-S] B. Muckenhoupt, E. M. Stein, *Classical Expansions and their Relation to Conjugate Harmonic Functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 118 (1965), 17-92.
- [M-So] D. Müller, F. Soria, *A Double-Weight  $L^2$  Inequality for the Kakeya Maximal Function*, Preprint.
- [N-S-W] A. Nagel, E. M. Stein, S. Wainger, *Differentiation in Lacunary Directions*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 75 (1978), 1060-1062.
- [R] J. L. Rubio de Francia *Factorization Theory and  $A_p$  Weights*, Amer. Jour. Math. 106 (1984), 533-547.
- [Sj] P. Sjögren, *A Remark on the Maximal Function for Measures in  $\mathbb{R}^n$* , Amer. Jour. of Math. 105 (1983), 1231-1233.
- [Sj-So] P. Sjögren, F. Soria, *Weak-Type (1,1) Estimates for Some Extension Operators Related to Rough Maximal Functions*, Göteborg preprint series (1991).
- [So-We] F. Soria, G. Weiss, *A remark on Singular Integrals and Power Weights*, Preprint.
- [S1] E. M. Stein, *Note on Singular Integrals*, Proc. Amer. Math. Soc 8 (1957), 250-254.
- [S2] E. M. Stein, *On Limits of Sequences of Operators*, Annals of Math. 74 (1961), 140-170
- [S3] E. M. Stein, *Some Problems in Harmonic Analysis*, Pro. Sym. Pure. Math. , vol 35, part 1, (1979) 3-20.
- [S-W] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton N. J. 1971.

- [St1] J. O. Strömberg, *Mazimal Functions for Rectangles with Given Directions*, Thesis, Mittag-Leffler Institute, Djursholm, Suecia, 1976.
- [St2] J. Strömberg, *Mazimal Functions Associated to Rectangles with Uniformly Distributed Directions*, Annals of Math. 107 (1978) 309-402.
- [W] S. Wainger, *Applications of Fourier Transform to Averages over Lower Dimensional Sets*, Pro. Sym. Pure. Math. vol 35, part 1, (1979) 85-94.

Doc. 1111  
de J  
Dochter 1111

APTO CUM LAUDE  
Lima, 24 SEPTIEMBRE DE 1993

Pro- Dne

For Luis Bore

A Cas

Pte Sjær

J. Duodjkoelke